*

En alternativ aksiomatisering av teorien om presise deskriptive utsagn.

*

Morten Rognes

1997

*

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

§1 Innledning. En alternativ aksiomatisering av teorien om presise deskriptive utsagn.

Formålet med dette skrift er å presentere en alternativ aksiomatisering av den teorien om presise deskriptive utsagn, T;1, som ble fremlagt i Rognes [2]. Hovedresultatet er et detaljert bevis for at den nye aksiomatiseringen er ekvivalent med den gamle. Vi skal innskrenke oss til å gjennomføre denne oppgaven som på langt nær er triviell. Innholdet i dette skrift er følgelig i det vesentlige av en rent teknisk karakter.

Imidlertid bemerker vi følgende: I den nye aksiomatiseringen av T;1 er de eneste grunnbegrepene, ved siden av de rent mengdeteoretiske, begreper som har med utsagn å gjøre. I teorien T;1 er imidlertid også begrepet 'mulig verden' et grunnbegrep ved siden av begrepet 'utsagn'. I denne forbindelse viser vi her hvordan uttrykket "mulig verden" kan defineres innenfor rammen av den nye teorien. Dette skjer ved at mulige verdener identifiseres med maksimalt konsistente utsagnsmengder. Dette har en viss interesse siden det viser hvordan man i prinsippet kan bygge opp en teori om utsagn uten nødvendigvis å måtte basere den på begrepet om mulige verdener.

Dette arbeidet forutsetter at man er fullt fortrolig med Rognes [1], [2]. Den notasjon og terminologi som er innført i disse arbeidene vil derfor bli brukt uten videre om ikke annet sies. Det samme gjelder de resultatene som er bevist i disse arbeidene.

La oss gi en oversikt over innholdet i de følgende paragrafer. I §2 definerer vi presist språket til den nye aksiomatiseringen. Dette er et vanlig første-ordens språk med identitet som er en utvidelse av språket for mengdelære. Dette siste språket, språket for mengdelære, betegnes i det følgende med "L;ê". Det nye språket som er en utvidelse av språket L;ê, betegner vi her med "L;ê[Δ]". I denne paragrafen gir vi også definisjoner av en rekke viktige begreper som vi trenger for å formulere den nye aksiomatiseringen. I §3 formulerer vi detaljert den nye teorien. Dette er en første-ordens teori som er en utvidelse av det mengdeteoretiske systemet ZFCu(L;ê[Δ]) som vi har gjort rede for i Rognes [6] og Rognes [7]. Et sammendrag av dette mengde-teoretiske systemet, Zermelo-Fraenkel systemet med urindivider, er gitt i et tillegg i Rognes [1]. Dette tillegget er tatt med som Appendix I i dette arbeidet. Den nye teorien betegnes i dette arbeidet med "Alt;(T;1)". I §3 gir vi en nøyaktig redegjørelse for hvilke formler i språket L;ê[Δ] som er ikke-logiske aksiomer i denne nye teorien. I §4 gir vi bevis for en rekke teoremer som lar seg utlede i Alt;(T;1), og viser i denne forbindelse, i §5, at alle de ikke-logiske aksiomene i T;1 lar seg utlede i Alt;(T;1). Dette viser at teorien Alt;(T;1) inkluderer T;1. I §6 viser vi at det omvendte holder, dvs. at man kan definere alle de ikke-logiske predikatene i Alt;(T;1) ved hjelp av dem i T;1 slik at alle teoremene i Alt;(T;1) kan utledes i T;1. Dette viser at de to teoriene er deduktivt ekvivalente. §7 inneholder en kort oppsummering og konklusjon.

§2. Språket til teorien Alt;(T;1).

I det følgende betegner "L;ê" det første-ordens språket med identitet der det ikke-logiske vokabularet kun inneholder de følgende to ikke-logiske predikater:

(1) "x er et element i mengden y " – "xêy"

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(2) "x er en mengde" – "M(x)"[1]

Er ∑ en eller annen mengde med ikke-logiske predikater betegner "L;ê[∑]" det språket vi får når det ikke-logiske vokabularet til L;ê utvides med alle predikatene i mengden ∑. ZFCu(L;ê[∑]) er den første-ordens teorien hvor de logiske aksiomene er alle instanser i språket L;ê[∑] av aksiomskjemaene (1) – (7) som er listet opp i Appendix I, hvor videre de ikke-logiske aksiomene er aksiomskjemaene M1 – M12 som også er nevnt i dette tillegget, og hvor endelig slutningsreglene utelukkende er modus ponens og universell generalisering.

I tillegg til de to ikke-logiske predikatene (1) og (2) som er nevnt ovenfor inneholder også språket til Alt;(T;1) de følgende predikater:

(3) "x er et utsagn" – "Ut(x)"
(4) "x er det utsagnet som er konjunksjonen av alle utsagnene i mengden y" – "Kn(x,y)"
(5) "x er det utsagnet som er disjunksjonen av alle utsagnene i mengden y" – "Dis(x,y)"
(6) "x er det utsagnet som er negasjonen av utsagnet y" – "Ng(x,y)"

Noen flere ikke-logiske predikater enn (1) – (6) inngår ikke i språket til teorien Alt;(T;1). La oss kalle den mengden med predikatkonstruksjoner som utelukkende inneholder konstruksjonen (3) – (4) for Δ. I lys av forklaringene som nå har blitt gitt ser man da at språket til Alt;(T;1) er L;ê[Δ].

I forbindelse med dette språket er det hensiktsmessig å definere en rekke uttrykk: Vi bruker "U" for å betegne mengden av alle utsagn. Formelt sett er U definert ved U = Mg(x: Ut(x)). I det følgende betegner "SNu(x)" det utsagnet som er konjunksjonen av alle utsagnene i utsagnsmengden x. Uttrykk av typen "SNu(x)" er derfor termer. Konstruksjonen er definert ved:

$$SNu(x) = (iy)(Kn(y,x)).$$

Vi bruker videre "UNu(x)" for å betegne unionen av utsagnene i utsagns-mengden x. Utrykket er definert ved hjelp av det ikke-logiske predikatet "Dis(y,x)" slik: UNu(x) = (iy)(Dis(x,y)). "Neg(x)" betegner negasjonen av utsagnet y. Formelt sett er termen definert slik: Neg(x) = (iy)(Ng(y,x)). Konjunkjonen av to utsagn x og y, K(x,y), er definert ved K(x,y) = SNu({x,y}). Endelig er disjunksjonen av de to utsagnene x og y definert slik:

$$D(x,y) = UNu(\{x,y\}).$$

Uttrykket "Kons(x)" betyr at x er en konsistent mengde med utsagn. Dette innebærer at x selvfølgelig er en mengde med utsagn, ie. at x Inkl U & M(x), men i tillegg at det ikke finnes noe utsagn y slik at konjunksjonen av alle utsagnene i mengden x er identisk med konjunksjonen av y og negasjonen av y. Uttrykket "Max;k(x)" betyr at x er en maksimalt konsistent utsagnsmengde. En maksimalt konsistent utsagnsmengde er en konsistent utsagnsmengde x der det ikke er mulig å legge til noe utsagn y, som ikke er med i x, slik at man får en mer omfattende mengde, xU{y}, som er konsistent.

De definisjonene vi så langt har gitt kan sammenfattes formelt slik:

[1] En detaljert redegjørelse for hva som menes med "første-ordens språk" er gitt i Rognes [2].

Definisjon 2.1(i) U= Mg(x: Ut(x))

(ii) SNu(x) = (iy)(Kn(y,x))

(iii) UNu(x) = (iy)(Dis(y,x))

(iv) Neg(x) = (iy)(Ng(y,x))

(v) K(x,y) = SNu({x,y})

(vi) D(x,y) = UNu({x,y})

(vii) Kons(x) <–>. M(x) & x Inkl U &
¬(Ey)(yêU & SNu(x) = K(y,Neg(y)))

(viii) Max;k(x) <–>. Kons(x) &
¬(Ey)(yêU & ¬(yêx) & Kons(xU{y}))

I det følgende er det meningen at "MV(x)" skal leses "x er en logisk mulig verden". Vi skal anta at enhver maksimalt konsistent utsagnsmengde representerer en logisk mulig verden, og definerer derfor "MV(x)" ved å sette at MV(x) <–> Max;k(x). Videre definerer vi relasjonen "True(w,x)", "w er en verden hvor utsagnet x er sant", ved å stipulere at True(w,x) hvis og bare hvis x er et utsagn og w er en logisk mulig verden og vi har at xêw. Vi betegner det kontradiktoriske og det nødvendig sanne utsagnet med henholdsvis "k" og "t" og setter k= SNu(U) og t= Neg(k). Mao. er det kontradiktoriske utsagnet konjunksjonen av alle utsagnene i mengden av utsagn og det nødvendig sanne utsagnet negasjonen av det kontradiktoriske utsagnet. Kondisjonalutsaget som har utsagnet x som antesedent og utsagnet y som konsekvent betegner vi med "C(x,y)". Det er definert ved C(x,y) = Neg(K(x,Neg(y)). Endelig betegner "I" mengden av logisk mulige verdener, og vi setter I = Mg(x: MV(x)).

De definisjonene som nå er nevnt kan sammenfattes formelt slik:

Definisjon 2.2

(i) MV(x) <–> Max;k(x)

(ii) True(w,x) <–> xêU & MV(w) & xêw

(iii) k = SNu(U)

(iv) t = Neg(k)

(v) C(x,y) = Neg(K(x,Neg(y))

(vi) I = Mg(x: MV(x))

Vi har nå gitt en presis definisjon av språket til Alt;(T;1) og innført en rekke begreper som vi i det følgende vil gjøre bruk av i forbindelse med dette språket. Det neste trinn er å spesifisere de formlene i L;ê[Δ] , som ikke er blandt de ikke-logiske aksiomene i ZFCu(L;ê[Δ]), og som er ikke-logiske aksiomer i Alt;(T;1).

§3 Definisjon av teorien Alt;(T;1). Avgrensing av de ikke-logiske aksiomene i teorien.

ZFCu(L:ê[Δ]) er som tidligere nevnt den første-ordens teorien i L;ê[Δ] hvor de logiske aksiomene er alle instanser av skjemaene (1) – (7), som er nevnt Appendix I, og hvor videre de ikke-logiske aksiomene er alle formlene M1 – M10, samt alle instanser i L;ê[Δ] av aksiomskjemaene M11 og M12.

Alt;(T;1) er en enkel utvidelse av denne teorien med ytterligere noen ikke-logiske aksiomer. Det dreier seg om de følgende:

Innledende aksiomer:

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

A1 Kn(x,y) –> (xêU & M(y) & y Inkl U)
A2 Neg(x,y) –> (x,yêU)
A3 Dis(x,y) –> (xêU & M(y) & y Inkl U)
A4 M(y) & y Inkl U –>. (E!x)Kn(x,y) & (E!x)Dis(x,y)
A5 y = ø –> ((ix)Kn(x,y) =t & (ix)Dis(x,y) = k)
A6 yêU –> (E!x)Neg(x,y)

Generaliserte distributive lover:

A7 yêU & M(x) & x Inkl U. –> K(y,UNu(x)) = UNu(Mg(K(y,z): zêx))
A8 yêU & M(x) & x Inkl U. –> D(y, SNu(x)) = SNu(Mg(D(y,z): zêx))

Generaliserte versjoner av de Morgans lover:

A9 M(x) & x Inkl U –> Neg(UNu(x)) = SNu(Mg(Neg(y): yêx))
A10 M(x) & x Inkl U –> Neg(SNu(x)) = UNu(Mg(Neg(y): yêx))

Lov om dobbelt negasjon:

A11 xêU –> (Neg(Neg(x)) = x & x≠Neg(x))

Andre aksiomer:

A12 xêU –> (SNu({x}) = x & UNu({x}) = x
A13 Cd(U) ≥ Aleph;0 & (Ey)(M(y) & y = U)
A14 xêU & y Inkl U & M(y) & x,Neg(x)êy . –> UNu(y) = t
A15 xêU –> K(x,t) = x
A16 M(x) & x Inkl U –> t = UNu(Mg(SNu(zUMg(Neg(r): rê(x–z))): zêPt(x)))
A17 M(x) & x ê Pt(Pt(U)) –> UNu(Mg(UNu(z): zêx)) = UNu(UN(x))
A18 M(x) & x ê Pt(Pt(U)) –> SNu(Mg(SNu(z): zêx)) = SNu(UN(x))
A19 x,yêU & K(x,Neg(y)) = K(Neg(x),y) –> x=y

Dette avslutter listen over ikke-logiske aksiomer som er spesifikke for Alt;(T;1).

Det kan være passende å fremsette noen forklarende kommentarer til disse aksiomene. De seks første aksiomene er tatt med fordi de garanterer at operasjonene SNu, UNu og Neg, slik vi har definert dem ovenfor, er funksjoner. Videre impliserer aksiom A1 at domenet til SNu er Pt(U) og at verdiområdet er inkludert i U. A3 sier det samme med hensyn på operasjonen SNu. Tilsvarende uttrykker A2 at domenet til Neg er U og at verdiområdet til Neg er inkludert i U. A4 er nødvendig for å kunne vise at SNu og UNu er funksjoner. A6 er nødvendig for å kunne vise at Neg er en funksjon. A5 fastsetter verdien til funksjonene SNu(x) og UNu(x) i det spesielle tilfelle at x er nullmengden. Konjunksjonen av alle de utsagnene som inngår i nullmengden er som man ser det nødvendige utsagnet t. Unionen av nullmengden er det kontradiktoriske utsagnet. Det skulle være unødvendig å påpeke at operasjonene SNu,UNu og Neg er operasjoner på utsagn som må holdes adskilt fra de helt analoge mengdeteoretiske operasjonene.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Aksiomene A7 og A8 er generaliserte versjoner av de vanlige distributive lover for konjunksjon og disjunksjon. A7 uttrykker at en endelig konjunkjson distribuerer over uendelig disjunksjon. A8 uttrykker at en endelig disjunksjon distribuerer over uendelig konjunksjon. A9 – A10 er generaliserte versjoner av de Morgans lover.

Aksiom A12 sier at dersom x er et utsagn så er den uendelige disjunk-sjonen, såvel som den uendelige konjunksjonen, av enhetsmengden som bare inneholder elementet x identisk med x. A13 uttrykker at kardinaltallet til mengden av utsagn er minst tellbart uendelig og at mengden av utsagn faktisk eksisterer. Denne siste påstanden følger ikke fra aksiomene i ZFCu(L;ê[Δ]) alene.

Aksiomet A14 uttrykker at dersom en utsagnsmengde y inneholder både et utsagn og negasjonen av utsagnet så er den uendelige disjunksjonen av y identisk med det nødvendig sanne utsagnet. A15 uttrykker at konjunksjonen av et utsagn x og det nødvendig sanne utsagn er identisk med utsagnet x.

A16 trenger noen ytterligere kommentarer. Anta x er en utsagnsmengde og anta at z er en delmengde av x. Vi kaller da utsagnet som er konjunksjonen av alle utsagnene i z og negasjonene av utsagnene i (x–z), mao.:

SNu(zUMg(Neg(r): rê(x–z)))

for tilstandsbeskrivelsen over x bestemt av z. Om vi innfører denne termino-logien uttrykker A16 at dersom x er en vilkårlig mengde av utsagn så er den uendelige disjunksjonen av alle tilstandsbskrivelsene over x, bestemt av delmengdene av x, identisk med det nødvendig sanne utsagn.

A17 uttrykker at dersom x er en familie av utsagnsmengder så er den uendelige disjunksjon av unionen av alle mengdene i familien identisk med den uendelige disjunksjon av de uendelige disjunksjonene av de enkelte mengdene i familien. A18 uttrykker et tilsvarende forhold for operasjonen SNu. Endelig sier A19 at dersom x og y er utsagn og konjunksjonen av x og negasjonen av y er identisk med konjunksjonen av y og negasjonen av x, så er utsagnene x og y identiske.

Vi kan nå definere teorien Alt;(T;1): Alt;(T;1) er den første-ordensteorien som fremkommer som resultat når man til teorien ZFCu(L;ê[Δ]) legger til formlene
A1 – A19 som de eneste nye ikke-logiske aksiomene.

I neste paragraf skal vi utlede en rekke teoremer i denne teorien og herunder vise at den deduktivt sett er ekvivalent med T;1.

§4 Bevis for teoremer.

Teorem 1 (i) x,y,zêPt(U) –>

SNu((xUy)Uz) = K(K(SNu(x),SNu(y)), SNu(z))
= K(SNu(x), K(SNu(y), SNu(z)))

(ii) x,yêPt(U) –> SNu(xUy) = K(SNu(x),SNu(y))

Bevis: Ad (i): Anta x,y,zêPt(U). Man har da ved hjelp av A18:

(1) SNu((xUy)Uz) = SNu(UN({UN{x,y},z}) (Egenskaper ved U)
= SNu({SNu(UN{x,y}), SNu(z)}) (A18)
= K(SNu(UN({x,y}), SNu(z)) (Definisjon av K)
= K(SNu({SNu(x),SNu(y)}), SNu(z)) (A18)
= K(K(SNu(x), SNu(y)), SNu(z)) (Definisjon av K)

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Dessuten har man:

(2) SNu((xUy)Uz)) = SNu(xU(yUz))
= SNu(UN({x,UN{y,z}}) (Egenskaper ved U)
= SNu({SNu(x),SNu(UN({y,z}))}) (A18)
= K(SNu(x),SNu(UN({y,z}))) (Definisjon av K)
= K(SNu(x),SNu({SNu(y),SNu(z)})) (A18)
= K(SNu(x), K(SNu(y)), SNu(z))) (Definisjon av K)

Fra (1) og (2) følger satsen.

Ad (ii): Anta x,yêPt(U). Vi har da:

SNu(xUy) = SNu(UN({x,y}))
= SNu(Mg(SNu(z): zê{x,y})) (A18)
= SNu({SNu(x), SNu(y)})
= K(SNu(x), SNu(y)) (Definisjon av K)

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 2 z Inkl xêPt(U) &M(z). –> SNu(x) = K(SNu(x–z),SNu(z))

Bevis: Siden z Inkl x & M(x) & M(z) har man at (x–z)Uz = x. Det følger da:

SNu(x) = SNu((x–z)Uz)
= SNu(UN({x–z,z}) (i lys av definisjonen av UN)
= SNu({SNu(x–z), SNu(z)}) (ved hjelp av A18)
= K(SNu(x–z),SNu(z))

Dette viser at satsen holder. **Q.E.D.**

Teorem 3 x,yêPt(U) & SNu(x)êy & zêy –> SNu(y) = SNu(xUyU{z})

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Vi har da at y = {SNu(x)}U{z}Uy. Det følger da ved hjelp av A18 at:

SNu(y) = SNu(UN{{SNu(x)}, UN({{z}, y})})
= SNu({SNu({SNu(x)}), SNu(UN({{z},y}))}) (ved hjelp av A18)
= SNu({SNu(x), SNu(UN({{z},y}))}) (ved hjelp av A12)
= SNu(UN({x,UN({y,{z}}))) (ved hjelp av A18)
= SNu(xU(yU{z})) **Q.E.D.**

Teorem 4 (i) zêPt(U) & xêU –> SNu({x, SNu(z)}) = SNu({x}Uz)
(ii) y,zêPt(U) –> SNu({SNu(y)} U z) = SNu(y U z)

Bevis: Ad (i): Anta z Inkl U & M(z) & xêU. Da har vi siden z= UN(Mg({y}:yêz)) at:

SNu({x} Uz) = SNu(UN({{x}, UN(Mg({y}: yêz))}))
= SNu(Mg(SNu(w): wê{{x}, UN(Mg({y}: yêz))}))
= SNu({SNu({x}), SNu(UN(Mg({y}: yêz)))}) (A18)
= SNu({x,SNu(UN(Mg({y}: yêz)))}) (A12)
= SNu({x, SNu(Mg(SNu({y}): yêz))}) (A18)
= SNu({x, SNu(Mg(y: yêz))}) (A12)
= SNu({x, SNu(z)})

Ad (ii): Anta y,zêPt(U). Da har man i lys av det som ble bevist under punkt (i) at:

SNu({SNu(y)}Uz) = SNu({SNu(y), SNu(z)})

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

= SNu(Mg(SNu(w): wê{y,z}))
= SNu(UN({y,z}) = SNu(yUz). **Q.E.D.**

Teorem 5 (i) yêPt(U) & zêy –> K(SNu(y),Neg(z)) = k
(ii) xêPt(U) –> SNu({k}Ux) = k.

Bevis: Ad (i): Anta yêPt(U) & zêy. Fra dette følger (1) y Inkl U & M(y). I lys av definisjonen av operasjonen K har man:

(2) K(SNu(y), Neg(z)) = SNu({SNu(y),Neg(z)})

Ved hjelp av aksiom A18 har man:

(3) SNu({SNu(y),Neg(z)}) = SNu(Mg(SNu(w): wê{y, {Neg(z)}}))
= SNu(UN({y,{Neg(z)}})) (Jmf. A18)
= SNu(y U {Neg(z)}) (Definisjon av UN)

Ved hjelp av love om dobbeltnegasjon, A11, og de Morgans lov, A10, har man:

(4) SNu(y U {Neg(z)}) = Neg(Neg(SNu(y U {Neg(z)})))
= Neg(UNu(Mg(Neg(r): rê(yU{Neg(z)}))))

Man har Mg(Neg(r): rê(yU{Neg(z)})) = Mg(Neg(r): rêy)U{z}. Siden zêy har man at Neg (z),zê Mg(Neg(r): rêy)U{z} og derfor ved hjelp av A14 at:

(5) UNu(Mg(Neg(r): rêy)U{z}) = t

Ved hjelp av dette og definisjonen av t følger:

(6) Neg(UNu(Mg(Neg(r): rêy)U{z})) = Neg(t) = Neg(Neg(k)) = k

Fra (2), (3), (4) og (6) følger det vi ønsker nemlig: K(SNu(y),Neg(z)) = k

Ad (ii): Anta xêPt(U). Man har nå ved hjelp av Teorem 4, punkt (ii), at:

(1) SNu({k}Ux) = SNu({SNu(U)}Ux)
= SNu(U U x)
= Neg(Neg(SNu(U U x)))
= Neg(UNu(Mg(Neg(r): rêU v rêx)))

Nå har man siden Cd(U)≥Aleph;0 at U≠ø og derfor at det finnes wêU. Da må Neg(w)êU (Jmf. definisjonen av Neg og A2). Det følger at

w,Neg(w)êMg(Neg(r): rêU v rêx)

Siden det er lett å se at Mg(Neg(r): rêU v rêx)) er en mengde inkludert i U, siden x Inkl U, følger det ved hjelp av A14 at:

UNu(Mg(Neg(r): rêU v rêx)) = t og derfor i lys av (1) at:

(2) SNu({k}Ux) = Neg(UNu(Mg(Neg(r): rêU v rêx)))
= Neg(t) = Neg(Neg(k)) = k

Dette viser at punkt (ii) holder. **Q.E.D.**

Teorem 6 (i) (Ax)(xêU –> k = K(x,Neg(x)))
(ii) (Ax)(xêU –> t = D(x,Neg(x)))
(iii) (Ex)(xêU & k= K(x,Neg(x)))
(iv) (Ex)(xêU & t = D(x,Neg(x)))

Bevis: Anta at x er et vilkårlig element der xêU. Da har man Neg(x)êU. Det følger om man setter a= {x,Neg(x)} at a Inkl U og M(a). Fra dette har man ved hjelp av A14 at:

(1) UNu(a) = UNu({x,Neg(x)}) = t.

Men vi har at UNu({x,Neg(x)}) per definisjon er identisk med D(x,Neg(x)). Fra dette, (1) og det at xêU følger punkt (ii) i teoremet. Nå har man:

K(x,Neg(x)) = SNu({x,Neg(x)})

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

= Neg(Neg(SNU({x,Neg(x)})))
= Neg(UNu(Mg(Neg(r): rê{x,Neg(x)})))
= Neg(UNu({x,Neg(x)})) = Neg(t) = k i lys av (1)

Fr dette og det at x var et vilkårlig element i U følger punkt (i) i teoremet. Fra aksiom A13 følger at Cd(U)≥Aleph;0 og derfor at U≠ø. Herav følger videre at det finnes x slik at xêU. Dette og punkt (i) og (ii) i teoremet impliserer punktene (iii) og (iv). **Q.E.D.**

Teorem 7
(i) Max;k(x) –> (Ay)(yêU –> (yêx v Neg(y)êx))
(ii) Max;k(x) & M(y) –> ((y Inkl x) <–> SNu(y)êx)
(iii) Max;k(x) & Max;k(y) & x≠y –> ¬Kons(xUy)
(iv) Max;k(x) –> ¬(Ey)(yêU & yêx & Neg(y)êx)
(v) Max;k(x) & aêx & bêU & C(a,b)êx –> bêx
(vi) Max;k(x) & yêU –> D(y, Neg(y))êx
(vii) Max;k(x) –> SNu(x)êx
(viii) Max;k(w) –> (¬(kêw))

Bevis: Ad(i): Anta (1) Max;k(x) og anta for reduktio ad absurdum at det finnes y der (2) yêU & ¬(yêx) & ¬(Neg(y)êx). Fra (1) og definisjonen av predikatet "Max;k" følger:

(3) Kons(x) & ¬(Ey)(yêU & ¬(yêx) & Kons(xU{y}))

Dette og (2) impliserer (4) ¬Kons(xU{y}). Siden yeU følger selvfølgelig at Neg(y)êU. Fra dette, (2) og (3) har vi (5) ¬Kons(xU{Neg(y)}). I lys av definisjonen av predikatet "Kons" følger fra (4) og (5):

(6) (Er)(rêU & SNu(xU{y}) = K(r,Neg(r)))
(7) (Er)(rêU & SNu(xU{Neg(y)}) = K(r,Neg(r)))

Dette følger fordi vi har xU{y} Inkl U og xU{Neg(y)} Inkl U i lys av (1) og (2). Det følger at M(xU{y}) og M(xU{Neg(y)}) i lys av utsondringsaksiomet siden U er en mengde i følge A13. Fra (6) og (7) følger ved hjelp av Teorem 6:

(8) SNu(xU{y}) = k
(9) SNu(xU{Neg(y)}) = k

Nå har man:

(10) SNu(xU{y}) = SNu(UN({x,{y}}))
= SNu(Mg(SNu(z): zê{x,{y}})) = K(SNu(x),y) (Jmf. A18)

Tilsvarende:

(11) SNu(xU{Neg(y)}) = K(SNu(x),Neg(y))

Vi har følgelig i lys av Teorem 6 og A15:

SNu(x) = K(SNu(x), D(y,Neg(y))
= D(K(SNu(x),y), K(SNu(x),Neg(y))) (Distributiv lov, A7)
= D(k,k) = k (Jmf. (10) og (11))

Men SNu(x) = k impliserer i lys av Teorem 6 og definisjonen av "Kons" at ¬Kons(x). Dette strider mot (3). Det følger at det ikke kan finnes y slik at (2) holder. Dette avslutter beviset for punkt (i) i teoremet.

Ad (ii): (A) Vi viser først den ene halvdelen av (ii) nemlig:
Max;k(x) & M(y) & y Inkl x. –> SNu(y)êx)

Anta derfor (1) Max;k(x) & M(y) & y Inkl x. Og anta for reduktio ad absurdum at (2) ¬(SNu(y)êx). Fra det siste, (1), det forhold at SNu(y)êU, og det som ble bevist under forrige punkt har man at Neg(SNu(y))êx. I lys av de Morgans lover, mer spesielt A10, har man da:

(3) UNu(Mg(Neg(r): rêy))êx

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Siden x = yU(x–y)U{UNu(Mg(Neg(r): rêy))} i lys av (3) har man:

(4) SNu(x) = SNu(yU(x–y)U{UNu(Mg(Neg(r): rêy))})
= SNu((x–y)UyU{UNu(Mg(Neg(r): rêy))})
= K(SNu(x–y), K(SNu(y),UNu(Mg(Neg(r): rêy)))

Den siste ligningen gjelder i kraft av Teorem 1. Nå har man når det gjelder den siste konjunkten i høyre side (4):

(5) K(SNu(y),UNu(Mg(Neg(r): rêy))
= UNu(Mg(K(SNu(y),Neg(r)): rêy)

i lys av det distributive aksiomet A7. Fra punkt (i) i Teorem 5 har man imidlertid:

(6) (Ar)(rêy –> K(SNu(y),Neg(r)) =k).

Dette impliserer at Mg(K(SNu(y),Neg(r)): rêy) = {k} om y≠ø. Er y=ø har man at Mg(K(SNu(y),Neg(r)): rêy) =ø og derfor at UNu(Mg(K(SNu(y),Neg(r)): rêy))=k i lys av A5. Fra dette og (5) følger at

(7) K(SNu(y),UNu(Mg(Neg(r): rêy)) = k

Fra (4) og (7) følger:

(8) SNu(x) = K(SNu(x–y),k) = SNu({SNu(x–y),k}) (Definisjon av K)
= SNu((x–y)U{k}) (Jmf. Teorem 4)
= k (Jmf. Teorem 5)

Fra (1) ovenfor har man at Max;k(x). Dette impliserer per definisjon at Kons(x) som i sin tur innebærer at (9) ¬(Ey)(yêU & SNu(x) = K(y,Neg(y)). Fra (8) følger SNu(x)= k. Fra dette og Teorem 6 følger (Ey)(yêU & SNu(x) = K(y,Neg(y)) som åpenbart strider mot (9). Dette viser at den ene halvdelen av (ii) holder.

(B) Vi ønsker nå å vise den andre halvdelen av (ii), nemlig at Max;k(x) & M(y) & SN(y)êx –> y Inkl x. Anta derfor for reduktio ad absurdum at

(1) Max;k(x) & M(y) & SN(y)êx & ¬(y Inkl x)

for noe y. Fra den siste konjunkten i (1) følger det at det må finnes noe z slik at

(2) zêy & ¬(zêx)

Fra den siste konjunkten i (2) og punkt (i) i satsen følger Neg(z)êx. Fra dette og tredje konjunkt i (1) følger:

(3) x = {SNu(y)} U {Neg(z)} Ux

Herav kan man slutte:

(4) SNu(x) = SNu({SNu(y)} U {Neg(z)} Ux)

Nå har man i lys av Teorem 1 at

(5) SNu({SNu(y)} U {Neg(z)} Ux)
= K(K(SNu({SNu(y)}), SNu({Neg(z)})), SNu(x))
= K(K(SNu(y),Neg(z)), SNu(x)) (Jmf.A12)

Videre har vi i lys av Teorem 5 siden zêy i lys av (2) at

(6) K(SNu(y),Neg(z)) = k. Fra (4), (5) og (6) følger:

(7) SNu(x) = K(k,SNu(x))

Men K(k,SNu(x)) = SNu({k,SNu(x)}) = SNu({k}U{SNu(x)}). Siden {SNu(x)} Inkl U og {SNu(x)} er en mengde følger da ved hjelp av Teorem 5 at man må ha: K(k,SNu(x)) = k. Fra dette og (7) følger

(8) SNu(x) = k.

Nå har man fra (1) at Max;k(x). Dette innebærer at Kons(x) som i sin tur impliserer per definisjon: (9) ¬(Ey)(yêU & SNu(x) = K(y,Neg(y))). Men fra (8) og Teorem 6 utleder man:

(10) (Ey)(yêU & SNu(x) = K(y,Neg(y))). Dette gir oss åpenbart en motsigelse.

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for punkt (ii) i teoremet.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Ad (iii): Anta (1) Max;k(x) & Max;k(y) & x≠y. Anta for reduktio ad absurdum at (2) Kons(xUy). Siden x≠y finnes det z slik at enten (a) zêx & ¬(zêy) eller (b) ¬(zêx) & zêy. Vi ser bare på det første tilfellet siden det andre kan behandles på en lignende måte. Siden ¬(zêy) har vi i lys av (i) i teoremet at Neg(z)êy. Men zêx. Det følger at z,Neg(z)ê(xUy). Fra dette kan man slutte at

(3) xUy = {z}U{Neg(z)} U(xUy)

Ved hjelp av Teorem 1 har man da:

(4) SNu(xUy) = SNu({z}U{Neg(z)} U(xUy))
= K(K(SNu({z}),SNu({Neg(z)})), SNu(xUy))
= K(K(z,Neg(z)), SNu(xUy)) (Jmf. A12)
= K(k,SNu(xUy)) (Jmf. Teorem 6)

Men K(k,SNu(xUy)) = SNu({k,SNu(xUy)}) = SNu({k}U{SNu(xUy)}). Siden {SNu(xUy)} Inkl U og {SNu(xUy)} er en mengde følger da ved hjelp av Teorem 5 at man må ha: K(k,SNu(xUy)) = k. Fra dette og (4) følger:

(5) SNu(xUy) = k.

Nå har man fra (2) at Kons(xUy). Dette innebærer per definisjon:

(6) ¬(Er)(rêU & SNu(xUy) = K(r,Neg(r))).

Men fra (5) og Teorem 6 utleder man:

(10) (Er)(rêU & SNu(xUy) = K(r,Neg(r))). Dette gir oss åpenbart en motsigelse.

Ad (iv): Anta (1) Max;k(x) og anta for reduktio ad absurdum at det finnes y slik at (2) yêU & yêx & Neg(y)êx. Da følger at {y,Neg(y)} Inkl x og siden M({y,Neg(y)}) har vi ved hjelp av punkt (ii) at SNu({y,Neg(y)}) êx. Nå har man i lys av Teorem 6 at SNu({y,Neg(y)}) = K(y,Neg(y)) = k og derfor at kêx. Men da har man x= {k}Ux. Det følger da ved hjelp av Teorem 5 at SNu(x) = SNu({k}Ux) = k. Herav følger ved hjelp av Teorem 6 at (Er)(rêU & SNu(xUy) = K(r,Neg(r))) som impliserer i lys av definisjonen av "Kons" at ¬Kons(x). Men dette strider mot at Max;k(x). Dette viser at punkt (iv) holder.

Ad (v): Anta (1) Max;k(x) & aêx & bêU & C(a,b)êx og anta for reduktio ad absurdum at (2) ¬(bêx). Fra (2) og punkt (i) i teoremet følger (3) Neg(b)êx. Fra dette og (1) har man derfor at (4) {a,Neg(b)} Inkl x. Fra den siste konjunkten i (1) og definisjonen av C følger: (5) Neg(K(a,Neg(b)))êx. Fra (4) og punkt (ii) i teoremet følger: (6) SNu({a,Neg(b)}) = K(a,Neg(b)) êx. Sett r = K(a,Neg(b)). Da har man fra (5) og (6) at r, Neg(r)êx. Men dette strider mot (1) og punkt (iv) i teoremet.

Ad (vi): Anta (1) Max;k(x) & yêU og anta for reduktio ad absurdum at (2) ¬(D(y, Neg(y))êx. Fra (2), punkt (i) i teoremet og (1) følger:

(3) Neg(D(y, Neg(y)))êx.

Nå har man i lys av A9 at:

(4) Neg(D(y,Neg(y))) = Neg(UNu({y,Neg(y)}))
= SNu(Mg(Neg(r): rê{y,Neg(y)}))
= SNu({Neg(y),y}) (Jmf. A11)

Det følger fra (3) og (4) at SNu({Neg(y),y})êx. Nå har man i lys av Teorem 6 at SNu({y,Neg(y)}) = K(y,Neg(y)) = k og derfor at kêx. Men da har man x= {k}Ux. Det følger da ved hjelp av Teorem 5 at SNu(x) = SNu({k}Ux) = k. Herav følger ved hjelp av Teorem 6 at (Er)(rêU & SNu(xUy) = K(r,Neg(r))) som impliserer i lys av definisjonen av "Kons" at ¬Kons(x). Men dette strider mot at Max;k(x). Dette viser at punkt (vi) holder.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Ad (vii) Anta Max;k(x). Det følger da i lys av definisjonen av "Max;k(x)" at M(x). Siden man åpenbart har at x Inkl x følger ved hjelp av punkt (ii) i teoremet at SNu(x)êx.

Ad (viii): Anta Max;k(w) og anta for reduktio ad absurdum at kêw. Da har man w= {k}Uw og derfor i lys av Teorem 5 og Teorem 6, siden wêPt(U), at

SNu(w) = SNu({k}Uw) = k = K(r,Neg(r)) for noe rêU

Men dette innebærer at w er inkonsistent og strider mot at w er maksimalt konsistent.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 7. **Q.E.D.**

Den følgende sats er en utsagnsteoretisk variant av det som ofte går under navnet *Lindenbaums teorem*:

Teorem 8 Kons(x) –> (Ey)(Max;k(y) & x Inkl y)

Bevis: Siden vi ifølge A13 har at U er en mengde finnes det en opptelling av U, dvs. det finnes en funksjon π der vi har:

(1) π : a;0 –(1-1,på)–> U

og hvor a;0êOn. (On er klassen av ordinaltall). Anta (2) Kons(x). Da har man i lys av definisjonen av "Kons" at (3) x Inkl U & M(x). Det følger i lys av aksiom A1 og A4 og definisjonen av SNu at (4) SNu(x)êU. (1) og (4) impliserer at det finnes noe b der:

(5) bêOn & SNu(x)= π(b)

Vi betrakter nå mengden C definert ved C = U–{π(b)} og definerer ∏:0 ved:

(6) ∏;0 = UNu(Mg(SNu(zUMg(Neg(r): rê(C–z))): zêPt(C))

Man har da i lys av A16 siden M(C) og C Inkl U at

(7) ∏;0 = t

Ved hjelp av A15 har man

(8) SNu(x) = K(SNu(x),t). Fra (6), (7) og (8) har vi derfor ved hjelp av det distributive aksiom A7 at:

(9) SNu(x) = UNu(Mg(K(SNu(x), SNu(zUMg(Neg(r): rê(C–z))): zêPt(C)))

Vi definerer Q(z) ved:

(10) Q(z) = {SNu(x)}UzU Mg(Neg(r): rê(C–z)) for z Inkl C

Man ser fra (9) og definisjonen av Q(z) at man har:

(11) SNu(x) = UNu(Mg(SNu(Q(z)): zêPt(C)))

Anta nå for reduktio ad absurdum at:

(12) (Az)(zêPt(C) –> SNu(Q(z)) = k) Da har man åpenbart at:

(13) Mg(SNu(Q(z)); zêPt(C)) = {k} siden Pt(C) åpenbart er ikke-tom.

(11) og (13) impliserer at SNu(x) = UNu({k}) = k i lys av A12. Men da har vi ved hjelp av Teorem 6 at SNu(x) = K(s, Neg(s)) for noe sêU. Men dette strider mot (2) som sier at x er en konsistent utsagnsmengde.

Siden (12) ikke holder har vi at det finnes noe z0 slik at SNu(Q(z0))≠k. Da kan vi ikke ha (Es)(sêU & SNu(Q(z0)) = K(s,Neg(s)) for fra dette følger SNu(Q(z0))=k i lys av Teorem 6. Vi har derfor:

¬(Es)(sêU & SNu(Q(z0)) = K(s,Neg(s)). Siden vi også har at Q(z0) Inkl U og det er lett å vise at Q(z0) er en mengde følger at vi har:

(14) Kons(Q(z0)) & z;0 Inkl C

Vi ønsker nå å vise at Q(z0) er en maksimalt konsistent utsagnsmengde. Med andre ord at man har:

Max;k(Q(z0))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes y0 som oppfyller de følgende krav:

(15) y0êU & ¬(y0êQ(z0)) & Kons({y0}UQ(z0))

Siden y0êU har man i lys av (1) at y0 =π(c) for noe cêa0. Vi kan ikke ha at c = b for da følger y0 = π(c)=π(b)= SNu(x)ê{SNu(x)} Inkl Q(z0) som strider mot (15). Det følger at c≠b. og derfor at y0ê(U–{π(b)} = C. Nå har vi z0 Inkl C. Man kan derfor ikke ha y0êz0 for da har man i kraft av definisjonen av Q(z0) at y0êz0 Inkl Q(z0). Også dette er umulig i lys av (15). Det følger at y0ê(C–z0). Men da har man:

Neg(y0)êMg(Neg(r): rê(C–z0)) Inkl Q(z0).

Det følger da at

(16) y;0, Neg(y;0)ê({y0}UQ(z0)).

Det følger da at SNu({y0}UQ(z0)) = K(y0,Neg(y0)). I lys av definisjonen av konsistent utsagnsmengde har man da ¬Kons({y0}UQ(z0)) siden vi åpenbart har at ({y0}UQ(z0)) er en utsagnsmengde. Men dette strider igjen mot (15).

Det følger at (15) leder til en motsigelse i alle tilfelle. Det følger at det ikke kan finnes y0 som oppfyller kravet (15). Herav følger

(17) Max;k(Q(z0)). Nå har man i lys av konstruksjonen av Q(z0) at SNu(x) ê{SNu(x)} Inkl Q(z0) og derfor at SNu(x)êQ(z0). Siden (17) holder har vi derfor i lys av Teorem 7, punkt (ii) at x Inkl Q(z0). Men da

x Inkl Q(z0) & Max;k(Q(z0)). Dette viser at satsen holder. **Q.E.D.**

Teorem 9 M(y) & y Inkl Mg(x: Max;k(x)) –>
(Ez)(zêU & (Aw)(Max:k(w) –> (zêw <–> wêy)))

Bevis: Anta (1) M(y) & y Inkl Mg(x: Max;k(x)). Siden xêPt(U) om Max;k(x) har vi at y Inkl Pt(U). Ved hjelp av definisjonen av "SNu" og aksiomene A1 og A4 følger da (Az)(zêy –> SNu(z)êU). Vi har videre i lys av definisjonen av "UNu" og A3 og A4 at UNu(Mg(SNu(z): zêy))êU. Sett per definisjon:

(2) u;0 = UNu(Mg(SNu(z): zêy)) Vi ønsker å vise at u;0 har de egenskaper som trengs.

(A) Vi vil først vise (Aw)(Max;k(w) & u;0êw –> wêy). Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes w slik at:

(3) Max;k(w) & u;0êw & ¬(wêy). Siden Max;k(w) har vi ved hjelp av Teorem 7 at SNu(w)êw. Dette og den andre konjunkten i (3) impliserer at {SNu(w),u;0} Inkl w. Fra dette og Teorem 7, punkt (ii) følger at

(4) SNu({SNu(w),u;0}) = K(SNu(w),u;0) ê w

Nå har vi i lys av den distributive lov for K og definisjonen av u;0 at

(5) K(SNu(w),u;0) = UNu(Mg(K(SNu(w),SNu(z)): zêy)

Fra dette og (4) følger:

(6) UNu(Mg(K(SNu(w),SNu(z)): zêy)) êw

Fra (3) følger at ¬(wêy) og fra (1) har man (Ar)(rêy –> Max;k(r)) I lys av Teorem 7, punkt (iii) følger da om r er et vilkårlig element i y at w≠r og derfor ¬Kons(wUr). Man har altså:

(7) (Ar)(rêy –> ¬Kons(wUr))

Dette i sin tur innebærer i lys av definisjonen av "Kons" at:

(8) (Ar)(rêy –> SNu(wUr)=k)

Nå har man SNu(wUr) = K(SNu(w),SNu(r)). Vi har derfor:

(9) (Ar)(rêy –> K(SNu(w),SNu(r)) =k) Fra dette følger om y≠ø at Mg(K(SNu(w),SNu(r)): rêy) = {k}. Vi har derfor ved hjelp av (6), om y≠ø, at

(10) k = UNu({k}) = UNu(Mg(K(SNu(w),SNu(r)): rêy) êw.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Det følger altså at kêw som strider mot at Max;k(w) i lys av Teorem 7. Har man på den annen side at y=ø følger fra definisjonen av u;0 at u;0 = UNu(ø)= k (Se A5 og definisjonen av "UNu"). Men da har vi i lys av (3) at kêw og Max;k(w) som strider mot Teorem 7, punkt (viii). Dette tilfellet er derfor utelukket.

(B) Vi ønsker dernest å vise at (Aw)(Max;k(w) & wêy. –> u;0êw). Anta derfor for reduktio ad absurdum at (1) Max;k(w) & wêy & ¬(u;0êw) for noe w. Fra den siste og den første konjunkten følger ved hjelp av Teorem 7:

(1) Neg(u;0)êw

Ved hjelp av definisjonen av u;0 og de Morgans lover følger fra (1):

(2) SNu(Mg(Neg(SNu(z)): zêy))êw

Fra dette og punkt (ii) Teorem 7 følger i lys av (1):

(3) Mg(Neg(SNu(z)): zêy) Inkl w

Siden wêy følger da Neg(SNu(w))êw. Fra Teorem 7 følger også SNu(w)êw. Men da Neg(SNu(w)), SNu(w)êw som, siden man har Max;k(w), strider mot punkt (iv) i Teorem 7. Det følger at antagelsen at det finnes w slik at (1) leder til en motsigelse.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 10 (Ax)(Max;k(x) –> (yêx <–> zêx)) & y,zêU. –> y=z.

Bevis: Det vil være tilstrekkelig å bevise:

(+) y≠z & y,zêU –> (Ex)(Max;k(x) & [(yêx &¬(zêx)) v (¬(yêx)& zêx)])

Anta derfor (1) y≠z &y,zêU. Nå har man fra A19:

(2) z,yêU & K(z,Neg(y)) = K(Neg(z),y) –> z=y

Herav:

(3) z,yêU & K(z,Neg(y)) =k & K(Neg(z),y)=k. –> z=y

Fra dette følger:

(4) z,yêU & y≠z. –> (K(z,Neg(y)) ≠k v K(Neg(z),y)≠k)

Fra (1) og (4) følger åpenbart at (K(z,Neg(y)) ≠k v K(Neg(z),y)≠k). Man kan nå sondre mellom to tilfelle alt etter som den ene eller den andre disjunkten holder. Vi ser bare på det første tilfellet siden det andre blir helt symmetrisk.

Anta (5) K(z,Neg(y))≠k. Anta for reduktio ad absurdum at

(6) ¬Kons({z,Neg(y)}). Siden {z,Neg(z)} er en utsagnsmengde i lys av (1) følger ved hjelp av definisjonen av "Kons" at:

(7) SNu({z,Neg(y)}) = K(r,Neg(r)) for noe r.

Dette innebærer at K(z,Neg(y)) = k i lys av Teorem 6 og definisjonen av K. Men dette strider mot (5). Vi har derfor at (6) ikke holder og at Kons({z,Neg(y)}). I lys av Lindenbaums teorem, ie. Teorem 8, følger det da at det finnes en Δ slik at:

(8) Max;k(Δ) & {z,Neg(y)} Inkl Δ Inkl U.

Dette impliserer at Neg(y)êΔ. Siden Ma;k(Δ) følger ved hjelp av Teorem 7 at ¬(yêΔ). Vi har derfor Max;k(Δ) & zêΔ & ¬(yêΔ). Dette impliserer konsekventen i (+) og viser at satsen holder i det tilfelle at K(z,Neg(y))≠k. Som nevnt behandles det tilfelle hvor K(y,Neg(z))≠k på helt tilsvarende vis. **Q.E.D.**

Teorem 11 (Ef)(Func(f) & f: U–(1-1,på)–> Pt(Mg(x: Max;k(x))))

Bevis: Vi definerer en funksjon f;0 ved:

(1) f;0 = Mg(<x,Mg(y: Max;k(y) & xêy)>: xêU)

Man har at f;0 Inkl U X Pt(U). Siden man lett på basis av de mengdeteoretiske aksiomene i teorien kan vise at U såvel som Pt(U) eksisterer følger det at UXPt(U) eksisterer. Fra dette og det at f;0 Inkl UXPt(U) følger eksistensen av f;0 i kraft av utsondringsaksiomet.

Det er nødvendig å vise at f;0 er en funksjon. Anta derfor <x,y>,<x,z>êf;0 for vilkårlige x,y,z. Fra (1) følger da at det finnes r1, r2 slik at:

(2) <x,y>= <r1,Mg(s: Max;k(s) & r1ês)> & r1êU

(3) <x,z>= <r2,Mg(s: Max;k(s) & r2ês)> & r2êU

Det følger fra dette at (4) r1=x=r2 og at

(5) y = Mg(s: Max;k(s) & r1ês) & z = Mg(s: Max;k(s) & r2ês)

Men fra (4) og (5) følger åpenbart y=z. Dette viser at f;0 er en funksjon.

Vi må vise at (6) Dom(f;0) = U. Anta for vilkårlig x at xêDom(f;0). Da finnes z slik at <x,z>êf;0. Fra dette og definisjonen av f;0 følger eksistensen av r slik at <x,z>= <r,Mg(s: Max;k(s) & rês)> & rêU. Men herav har man x=rêU og derfor xêU. Anta på den annen side at xêU for noe x. Da må det finnes z slik at
z= <x,Mg(s: Max;k(s) & xês)>. På basis av de mengdeteoretiske aksiomene i teorien og det forhold at Mg(s: Max;k(s)) Inkl Pt(U) kan man vise at det må finnes y = Mg(s: Max;k(s) & xês) der M(y). Det følger at z=<x,y>êf;0 og derfor at x er med i Dom(f;0). Dette viser at (6) holder.

Det er nødvendig å bevise at f;0 er en-entydig. Anta derfor

(7) <y,x>,<z,x>êf;0 for vilkårlige x,y,z. Ved hjelp av (1) følger da eksistensen av r1, r2 slik at:

(8) <y,x>= <r1,Mg(s: Max;k(s) & r1ês)> & r1êU

(9) <z,x>= <r2,Mg(s: Max;k(s) & r2ês)> & r2êU

Fra (8) og (9) følger (10) y=r1 & z=r2. Det følger videre at:

(11) Mg(s: Max;k(s) & r1ês) = Mg(s: Max;k(s) & r2ês)

Fra (8), (9) og (11) følger:

(12) r1,r2êU & (As)(Max;k(s) –> (r1ês <–> r2ês))

Fra dette og Teorem 10 følger r1=r2 som sammen med (10) gir en det som ønskes, nemlig y=z.

Tilslutt må det bevises at f;0 er på Pt(Mg(x:Max;k(x))). Det vil være tilstrekkelig å bevise at (13) Rgn(f;0) = Pt(Mg(x:Max;k(x))). Vi ser først på inklusjonen mot venstre i (13). Anta for vilkårlig y at yêPt(Mg(x:Max;k(x))). Det følger da at M(y) & y Inkl Mg(x:Max;k(x)). I lys av Teorem 9 følger da eksistensen av z slik at

(14) zêU & (Aw)(Max:k(w) –> (zêw <–> wêy)))

Fra dette følger:

(15) zêU & y = Mg(w: Max;k(w) & zêw)

For anta sêy for vilkårlig s. Siden y Inkl Mg(x:Max;k(x)) følger Max;k(s) og derfor ved hjelp av (14) at zêw. Har man på den annen side sêMg(w: Max;k(w)&zêw) følger Max;k(s) & zês. Da følger ved hjelp av (14) at sêy. Dette viser at (15) holder. Men fra (15) og definisjonen av f;0 følger <z,y>êf;0 og derfor yêRgn(f;0). Det viser at inklusjonen mot venstre i (13) holder.

La oss så vise inklusjonen mot høyre i (13): Anta for vilkårlig y at yêRgn(f;0). Da finnes x slik at <x,y>êf;0. Fra dette og definisjonen av f;0 følger eksistensen av r slik at

<x,y>= <r,Mg(s: Max;k(s) & rês)> & rêU

Men herav har man y = Mg(s: Max;k(s) & rês) êPt(Mg(x: Max;k(x))).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 12 (Ey)(M(y) & (Az)(zêy <–> Max;k(z)))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Bevis: I lys av A13 har man at U er en mengde, dvs. at det finnes y der M(y) & y=U. Ved hjelp av potensmengdeaksiomet følger da eksistensen av z slik at z=Pt(U). Anta Max;k(x). Da har vi per definisjon at Kons(x). I lys av definisjonen av "Kons" følger da x Inkl U, ie. xêPt(U). Man har altså at Mg(x: Max;k(x)) Inkl Pt(U). Ved hjelp av utsondringsaksiomet følger da at det finnes w der M(w) & (Az)(zêw <–> Max;k(z)). **Q.E.D.**

Teorem 13 Cd(Mg(x: Max;k(x))) ≥ Aleph;0

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at Cd(Mg(x;Max;k(x))) < Aleph;0. Da finnes det naturlig tall nêNat slik at Cd(Mg(x;Max;k(x))) =n. Man har da at

(1) Cd(Pt(Mg(x;Max;k(x))))= 2^n < Aleph;0. I lys av Teorem 11 må det finnes f der:

(2) f: U–(1-1,på)–> Pt(Mg(x: Max;k(x)))

Men fra (1) og (2) følger at Cd(U)= 2^n < Aleph;0. Dette strider mot A13 som impliserer at Cd(U)≥Aleph;0. **Q.E.D.**

Teorem 14 True(w,x) –> Ut(x) & MV(w)

Bevis: Dette er en direkte følge av definisjonen av "True(w,x)". (Se Definisjon 2.2 i §2). **Q.E.D.**

Teorem 15 (i) Ut(x) & Ut(y) & Mg(w: True(w,x)) = Mg(w: True(w,y)). –> x=y

(ii) Ut(x) & Ut(y) & Mg(w: xêw & Max;k(w) & xêU) = Mg(w: yêw & Max;k(w) & yêU). –> x=y

Bevis: Ad (i): I lys av definisjonen av "True(w,x)" (Se Definisjon 2.2) følger dette umiddelbart fra punkt (ii)

Ad (ii): Anta at

(1) Ut(x) & Ut(y) & Mg(w: xêw & Max;k(w) & xêU) = Mg(w: xêw & Max;k(w) & xêU)

Fra den siste konjunkten følger nokså åpenbart:

(2) (Aw)(Max;k(w) –> (xêw <–> yêw))

For anta Max;k(w) &xêw. Fra dette og det at Ut(x) følger:

wêMg(w: xêw & Max;k(w) & xêU)

Men fra dette og den siste konjunkten i (1) følger yêw. Dette viser at den ene halvdelen av (2) holder. Den andre halvdelen bevises analogt. Fra (2) og de to første konjunktene i (1) følger x=y ved hjelp av Teorem 10. **Q.E.D.**

Teorem 16 (i) (Ay)(M(y) & y Inkl Mg(x:MV(x)) –> (Ez)(U(z) & Mg(w: True(w,z)) = y))

(ii) (Ay)(M(y) & y Inkl Mg(x: Max;k(x)) –> (Ez)(Ut(z) & Mg(w: zêw & Max;k(w) &zêU) = y))

Bevis: I lys av definisjonen av "True(w,x)" er det opplagt at den første delen av teoremet følger fra den siste. Vi gir derfor bare bevis for (ii): Anta derfor for vilkårlig y at:

(1) M(y) & y Inkl Mg(x: Max;k(x)). I lys av Teorem 9 finnes det da z der man har:

(2) zêU & (Aw)(Max:k(w) –> (zêw <–> wêy))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Man har da at (3) Ut(z) i lys av definisjonen av U. Anta zêw & Max;k(w) &zêU. Ved hjelp av (2) følger da wêy. Anta på den annen side at wêy. Da har man Max;k(w) ved hjelp av (1). Det følger da ved hjelp av (2) at zêw. Samlet har man i så fall zêw & Max;k(w) & zêU. Dette viser at:

Mg(w: zêw & Max;k(w) &zêU) = y. Fra dette og (2) følger så konsekventen i punkt (ii). **Q.E.D.**

Teorem 17 (i) xêPt(U)–>True(w,SNu(x)) <–> wêI & (Ay)(yêx –> True(w,y))

(ii) xêPt(U) –> SNu(x) = (iy)(Ut(y) &
Mg(w: True(w,y)) = I Ω SN/zêx/(Mg(w: True(w,z))))

Bevis: Ad (i): Anta (1) xêPt(U) & True(w,SNu(x)). I lys av Definisjon 2.2 innebærer dette (2) SNu(x)êU & Max;k(w) & SNu(x)êw. Siden Max;k(w) følger det per definisjon at MV(w) og derfor at wêI = Mg(x:MV(x)). Anta for vilkårlig y at yêx. Fra den andre konjunkten i (2) og Teorem 7 følger at

SNu(x)êw <–> x Inkl w. Fra dette og den tredje konjunkten følger x Inkl w. Dette og yêx impliserer yêw. Men siden xêPt(U) har vi x Inkl U og derfor yêU. Vi har altså at yêU & Max;k(w) & yêw. Ved hjelp av Definisjon 2.2 følger herav True(w,y). Dette viser at den ene halvdelen av (i) holder.

Anta på den annen side:

(3) xêPt(U) & wêI & (Ay)(yêx –> True(w,y))

Fra den siste konjunkten og Definisjon 2.2 følger:

(4) (Ay)(yêx –> (yêU & Max;k(w) & yêw))

Fra dette følger (Ay)(yêx –> yêw), med andre ord at (5) x Inkl w. Vi sondrer nå mellom to tilfelle:

Tilfelle (a): x≠ø. Da har man zêx for noe z og derfor i lys av (4) at Max;k(w). Siden x Inkl w følger da ved hjelp av Teorem 7 at SNu(x)êw. Siden Max;k(w) og SNu(x)êU om xêPt(U) følger True(w, SNu(x)).

Tilfelle (b): x=ø. I lys av aksiom A5 og definisjonen av operasjonen SNu har man da SNu(x)=t. Det følger da ved hjelp av Teorem 6 og Teorem 7 at SNu(x)êw. Siden wêI i lys av (3) ovenfor har vi Max;k(w). Videre har vi SNu(x)êU i lys av A1. Det følger at True(w, SNu(x)) i lys av Definisjon 2.2.
Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (i).

Ad (ii): For å bevise dette punktet i satsen er det tilstrekkelig å bevise de følgende tre ting:

(a) (Ey)(y = SNu(x))

(b) (E!y)(Ut(y) &Mg(w: True(w,y)) = I Ω SN/zêx/(Mg(w: True(w,z))))

(c) (Ay)(Kn(y,x) <–>
Ut(y) &Mg(w: True(w,y)) = I Ω SN/zêx/(Mg(w: True(w,z))))

gitt at xêPt(U).

Ad (a): Siden vi forutsetter at xêPt(U), ie. at x Inkl U & M(x) følger fra A4 at (E!y)(Kn(y,x)). I lys av definisjonen av SNu følger herav (Ey)(y = SNu(x))

Ad (b): Denne påstanden kan deles opp i to deler, nemlig en eksistensdel og en entydighetsdel. Vi ser først på eksistensdelen. Vi skal bevise:

(Ey)(Ut(y) &Mg(w: True(w,y)) = I Ω SN/zêx/(Mg(w: True(w,z))))

Sett a = SN/zêx/(Mg(w: True(w,z))). Man har

(1) IΩa Inkl I Inkl Mg(x:Max;k(x))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Videre er det klart i lys av utsondringsaksiomet og Teorem 12 at M(IΩa). I lys av Teorem 9 har man derfor for noe y:

(2) yêU & (Aw)(Max:k(w) –> (yêw <–> wêIΩa))

Det vil nå være tilstrekkelig å bevise True(w,y) <–> wê(IΩa). Anta True(w,y). Fra definisjonen av "True" følger da yêU & Max;k(w) & yêw. Dette og (2) impliserer åpenbart wêIΩa. Anta på den annen side wê(IΩa). Da følger at wêI og siden I = Mg(x:Max;k(x)) har man da Max;k(w). Siden Max;k(w)&wê(IΩa) følger ved hjelp av (2) at yêw. Vi har derfor yêU & Max;k(w) & yêw. Det følger at True(w,y). Dette avslutter vårt bevis for eksistensdelen i (b).

La oss nå se på entydighetsdelen: Anta y1,y2 er slik at:

(3) Ut(y1) &Mg(w: True(w,y1)) = I Ω SN/zêx/(Mg(w: True(w,z)))

(4) Ut(y2) &Mg(w: True(w,y2)) = I Ω SN/zêx/(Mg(w: True(w,z)))

Det følger da umiddelbart at:

(5) Ut(y1) & Ut(y2) & Mg(w: True(w,y1)) = Mg(w: True(w,y2))

Fra den siste konjunkten i (5) og definisjonen av "True" ser man lett at man har:

(6) (Aw)(Max;k(w) –> (y1êw <–> y2êw))

Men fra dette, (5) og Teorem 10 følger y1 = y2. Dette avslutter beviset for (b).

Ad (c): Vi viser først kondisjonalen mot høyre. Anta (1) Kn(y,x). Siden xêPt(U) har vi i lys av A4 at y er entydig bestemt Vi har derfor y=SNu(x). Det følger videre ved hjelp av A1 at yêU. Vi skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): x=ø. I lys av A5 har man da (2) SNu(x) =t. Videre har vi i dette tilfelle at (3) SN/zêx/(Mg(w: True(w,z)) = V og derfor at

(4) IΩSN/zêx/(Mg(w: True(w,z)) = I

For å vise at høyre side i (c) holder i dette tilfellet er det derfor tilstrekkelig å vise at Mg(w: True(w,y)) = I. Inklusjonen mot høyre er triviell: Har man at True(w,y) følger per definisjon at yêU & Max;k(w) & yêw. Men fra den andre konjunkten her følger umidelbart i lys av definisjonen av I at wêI. Anta på den annen side at wêI for noe w. Da følger (Jmf. Definisjon 2.2) at Max:k(w). Nå har vi y=SNu(x) =t og at yêU. For å vise at True(w,y) er det derfor tilstrekkelig å vise at têw. Men siden Max;k(w) følger dette ved hjelp av Teorem 7, punkt (vi) og Teorem 6 siden U er ikke-tom.

Tilfelle (ii): x≠ø. Vi har fra (1) at (5) Ut(y). Anta først (6) True(w,y) med det for øye å bevise wêI Ω SN/zêx/(Mg(w: True(w,z))). Fra (6) følger:

(7) Max;k(w) & yêw. Det er da klart at wêI. Videre har vi siden y=SNu(x) at SNu(x)êw. Fra dette og (7) har man ved hjelp av Teorem 7 at

(8) x Inkl w. Anta nå zêx for vilkårlig z. Da følger i lys av (8) at zêw. Siden vi forutsetter at xêPt(U) har vi også zêU. Videre har vi Max;k(w). Fra disse tre forhold følger True(w,z). Man har altså:

(8) (Az)(zêx –> True(w,z)). Men dette impliserer wêSN/zêx/(Mg(w: True(w,z))). Det følger at wê I Ω SN/zêx/(Mg(w: True(w,z))).

Anta så på den annen side at

(9) wê I Ω SN/zêx/(Mg(w: True(w,z)))

med det for øye å vise at True(w,y). Fra (9) følger:

(10) (Az)(zêx –> True(w,z)). Fra dette og definisjonen av "True" har man: (11) (Az)(zêx –> (Ut(z) & Max;k(w) & zêw)). Fra (9) følger åpenbart i lys av definisjonen av I at (12) Max;k(w). Videre følger fra (11) at

(13) x Inkl w & x Inkl U

Siden y =SNu(x) har vi fra (12), (13) og Teorem 7 at y=SNu(x)êw. Siden Max;k(w) &yêU følger da True(w,y) som er det vi ønsker.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for kondisjonalen mot høyre i (c). La oss så bevise kondisjonalen mot venstre:

Anta:

(14) Ut(y) &Mg(w: True(w,y)) = I Ω SN/zêx/(Mg(w: True(w,z)))

Tilfelle (i): x=ø. Da har man at SN/zêx/(Mg(w: True(w,z))) = V. Det følger derfor fra (14) at:

(15) Ut(y) & Mg(w: True(w,y)) = I Dette innebærer:

(16) (Aw)(Max;k(w) –> yêw). Ved hjelp av Teorem 6 og Teorem 7 utleder man lett: (Aw)(Max;k(w) –> têw). Det følger fra dette og (16) at

(Aw)(Max;k(w) –> (yêw <–> têw)). Fra dette og Teorem 10 har man siden, y,têU at y=t. Siden x=ø følger ved hjelp av A5 at (iy)(Kn(y,x))=t. Dette impliserer Kn(t,x) og derfor har man siden y=t at Kn(y,x).

Tilfelle (ii): x≠ø. Det følger da fra (14) og definisjonen av "True":

(17) (Aw)(yêU & Max;k(w) & yêw. <–> . Max;k(w) &
(Az)(zêx –>(Max;k(w) & zêw & zêU)))

Fra dette og det at vi har yêU & x≠ø & x Inkl U følger:

(18) (Aw)(Max;k(w) –> (yêw <–> (Az)(zêx –> zêw))) Herav:

(19) (Aw)(Max;k(w) –> (yêw <–> x Inkl w))

Fra dette har vi ved ved hjelp av Teorem 7, punkt (ii):

(20) (Aw)(Max;k(w) –> (yêw <–> SNu(x)êw))

Men siden y, SNu(x)êU følger fra dette og Teorem 10: y=SNu(x). Herav:
y= (iz)(Kn(z,x)). Fra dette følger så Kn(y,x). Dette avslutter vårt bevis for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 18 (i) xêPt(U) –>. True(w,UNu(x)) <–> (Ey)(yêx & True(w,y))

(ii) xêPt(U) –> UNu(x) = (iy)(Ut(y) &
Mg(w: True(w,y)) = UN/zêx/(Mg(w: True(w,z))))

Bevis: Ad (i): Dette punktet følger fra det andre. Generelt har man at fra a =(ix)G(x) følger G(a). Anvender man dette, ser man at (ii) impliserer:

(1) xêPt(U) –>. True(w,UNu(x)) <–> wêUN/zêx/(Mg(w: True(w,z)))

Men dette er i lys av definisjonen av UN ekvivalent med (i).

Ad (ii): Det vil være tilstrekkelig å bevise:

(+) xêPt(U) –>. Dis(y,x) <–> Ut(y) &
Mg(w: True(w,y)) = UN/zêx/(Mg(w: True(w,z)))

For holder dette generelt har man fra A4 at (E!y)(Dis(y,x)). Men fra dette og (+) følger at det finnes et og bare et objekt som oppfyller den høyre komponenten i konsekventen i (+). Fra dette følger så (ii).

Anta (1) xêPt(U). Vi viser først kondisjonalen mot høyre i (+). Anta (2) Dis(y,x). Ved hjelp av A3 følger da (3) Ut(y). Anta nå (3.1) True(w,y) for vilkårlig w. Fra (2), A4 og definisjonen av UNu har vi (5) y = UNu(x). Siden xêPt(U) har vi fra (5) ved hjelp av loven om dobbeltnegasjon og de Morgans lover (A9 – A11) at (6) y = Neg(SNu(Mg(Neg(r): rêx)). Fra (3.1) følger:

(7) Max;k(w) & yêw. I lys av (6) har man derfor:

(8) Max;k(w) & Neg(SNu(Mg(Neg(r): rêx)))êw

Fra dette følger ved hjelp av Teorem 7 at:

(9) ¬(SNu(Mg(Neg(r): rêx))êw)

Fra (8), (9) og Teorem 7, punkt (ii) har man (10) ¬(Mg(Neg(r): rêx) Inkl w)

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Men dette innebærer at ¬(Az)(zêx –> Neg(z)êw). Med andre ord må det finnes z der man har zêx &¬(Neg(z)êw). Men fra dette følger (11) (Ez)(zêx & zêw) i lys av Teorem 7. Nå har vi at Max;k(w) & zêx Inkl U. Fra (11) følger derfor
(Ez)(zêx & True(w,z)). Med andre ord: wêUN/zêx/(Mg(w: True(w,z)).

Anta nå på den annen side:

(13) wêUN/zêx/(Mg(w: True(w,z))

for vilkårlig w. Herav følger:

(14) (Ez)(zêx & True(w,z)). Dette i sin tur impliserer:

(15) (Ez)(zêx & zêU & Max;k(w) & zêw). Fra dette kan man slutte:

(16) Max;k(w) & (Ez)(zêx & zêw) Ved hjelp av Teorem 7 har man da:

¬(Az)(zêx –> Neg(z)êw). Fra dette følger ¬(Mg(Neg(r): rêx) Inkl w) og derfor ved hjelp av Teorem 7: ¬(SNu(Mg(Neg(r): rêx))êw). Dette innebærer siden Max;k(w) at UNu(x) = Neg(SNu(Mg(Neg(r): rêx))êw. Men UNu(x)êU siden xêPt(U). Vi må derfor ha True(w, UNu(x)) og følgelig , siden y=UNu(x) at True(w,y).

Vi har nå vist at kondisjonalen mot høyre i (+) holder.

Vi ser nå på kondisjonalen mot venstre i (+). Anta:

(17) xêPt(U) og dessuten:

(18) Ut(y) & Mg(w: True(w,y)) = UN/zêx/(Mg(w: True(w,z)))

Fra den andre konjunkten her følger:

(Aw)((Ut(y) & Max;k(w)&yêw) <–> (Ez)(zêx & Ut(z) & Max;k(w)&zêw))

Fra dette følger sammen med (18)

(19) (Aw)(Max;k(w) –> (yêw <–> (Ez)(zêx & zêw)))

Ved hjelp av Teorem 7 har man:

(20) (Aw)(Max;k(w) –> (Ez)(zêx&zêw) <–> (Ez)(zêx&zêw))

Fra dette følger;

(21) (Aw)(Max;k(w) –>
¬(Mg(Neg(r):rêx) Inkl w) <–> (Ez)(zêx&zêw))

Ved hjelp av Teorem 7 kan man utlede:

(22) (Aw)(Max;k(w) –>
Neg(SNu(Mg(Neg(r):rêx)))êw <–> ¬(Mg(Neg(r):rêx) Inkl w)

Fra (19) – (22) følger:

(23) (Aw)(Max;k(w) –> (yêw <–> UNu(x)êw))

Siden y,UNu(x)êU følger ved hjelp av Teorem 10 at y=UNu(x). Men fra dette og definisjonen av "UNu" følger Dis(y,x).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 19 (i) xêU –>. True(w,Neg(x)) <–> (wêI & ¬(True(w,x)))

(ii) xêU –>. Neg(x) = (iy)(Ut(y) &
Mg(w: True(w,y)) = I – Mg(w: True(w,x)))

Bevis: Ad (i): Dette punktet følger fra det andre. Generelt har man at fra F(x) –> a =(iy)G(y,x) følger F(x)–>G(a,x). Anvender man dette ser man at (ii) impliserer:

(1) xêU –>. True(w,Neg(x)) <–> wê(I– Mg(w: True(w,x)))

Men dette er ekvivalent med (i).

Ad (ii): Det vil være tilstrekkelig å bevise:

(+) xêU –> (Ng(y,x) <–> Ut(y) &
Mg(w: True(w,y)) = I – Mg(w: True(w,x)))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

For holder dette generelt har man fra A6 at (E!y)(Ng(y,x)). Men fra dette og (+) følger at det finnes et og bare et objekt som oppfyller den høyre komponenten i konsekventen i (+). Fra dette følger så (ii).

Vi beviser først halvdelen mot høyre i (+). Anta:

(1) xêU & Neg(y,x). Da har vi i lys av A6 og A2 at (2) y = Neg(x), og dessuten: (3) Ut(y). Anta True(w,y). I lys av definisjonen av "True" har man da (4) Max;k(w) & yêw. Siden y = Neg(x) følger at (5) Neg(x)êw. Fra dette og (4) følger ved hjelp av Teorem 7 at ¬(xêw). Men dette innebærer at

(5) wê(I– Mg(w: True(w,x)).

Anta at man på den annen side har at

(6) wê(I–Mg(w:True(w,x)))

Da har man wêI og derfor i lys av definisjonen av I at Max;k(w). Videre følger ¬(xêw & xêU & Max;k(w)). Siden xêU i lys av (1) har man fra dette at ¬(xêw). Men siden Max;k(w) følger da ved hjelp av Teorem 7 at Neg(x)êw. Men da har man y=Neg(x)êw & Max;k(w) & Ut(y). Dette impliserer True(w,y).

Vi har nå vist:

(7) xêU &Ng(y,x) –> Ut(y) &Mg(w: True(w,y)) = I – Mg(w: True(w,x)))

Vi skal så vise den andre halvdelen av (+), mer nøyaktig ønsker vi å vise:

(8) Ut(x) &Ut(y) &Mg(w: True(w,y)) = I – Mg(w: True(w,x))) –> Neg(y,x)

Anta derfor:

(9) Ut(y) &Mg(w: True(w,y)) = I – Mg(w: True(w,x)))

I lys av definisjonen av "I" og "True" (Se Definisjon 2.2) følger herav:

(10) (Aw)(Ut(y) & Max;k(w)& yêw <–> (Max;k(w) & ¬(Ut(x) & Max;k(w)& xêw))

Fra dette følger i sin tur, siden Ut(x):

(11) (Aw)(Max;k(w) –> (yêw <–> ¬(xêw)))

Men fra dette følger ved hjelp av Teorem 7:

(12) (Aw)(Max;k(w) –> (yêw <–> Neg(x)êw))

Siden x,yêU har man herav ved hjelp av Teorem 10 at y=Neg(x). Men fra dette og definisjonen av "Neg" følger Ng(y,x). **Q.E.D.**

Teorem 20

(i) x,y,zêU –> D(D(x,y),z) = D(x,D(y,z))
(ii) x,y,zêU –> K(K(x,y),z) = K(x,K(y,z))
(iii) x,yêU –> K(x,y) = K(y,x)
(iv) x,yêU –> D(x,y) = D(y,x)
(v) x,y,zêU –> K(x,D(y,z)) = D(K(x,y), K(x,z))
(vi) x,y,zêU –> D(x,K(y,z)) = K(D(x,y),D(x,z))
(vii) x,yêU –> Neg(K(x,y)) = D(Neg(x), Neg(y))
(viii) x,yêU –> Neg(D(x,y)) = K(Neg(x), Neg(y))
(ix) xêU –>. D(k,x) = x & K(t,x)= x
(x) xêU –> D(x,Neg(x))= t & K(x,Neg(x)) = k

Påstandene i Teorem 20 er enkle, ja nærmest trivielle, konsekvenser av de ikke-logiske aksiomene som inngår i Alt;(T;1). Forøvrig viser Teorem 20 at strukturen <U,D,K,Neg,k,t> er en Boolsk algebra med univers U.

Bevis: Ad (i): Anta x,y,zêU. Da har man:

D(D(x,y),z) = UNu({UNu({x,y}),z}) (Definisjon av D)
= UNu(Mg(w: w= UNu({x,y}) v w =z))
= UNu(Mg(UN(r): r={x,y} v r={z})) (A12)
= UNu(Mg(UNu(w): wê{{x,y},{z}})) (Def. av "{x,y}")
= UNu(UN({{x,y},z})) (A17)
= UNu(UN({x,{y,z}})) (Elementær mengdelære)
= UNu(Mg(UNu(w): wê{{x},{y,z}})) (A17)
= UNu({x,UNu({y,z})})
= D(x,D(y,z))

Ad (ii): Anta x,y,zêU. Da har man:

K(K(x,y),z) = SNu({SNu({x,y}),z}) (Definisjon av K)
= SNu(Mg(w: w= SNu({x,y}) v w =z))
= SNu(Mg(SN(r): r={x,y} v r={z})) (A12)
= SNu(Mg(SNu(w): wê{{x,y},{z}})) (Def. av "{x,y}")
= SNu(UN({{x,y},z})) (A18)
= SNu(UN({x,{y,z}})) (Elementær mengdelære)
= SNu(Mg(SNu(w): wê{{x},{y,z}})) (A18)
= SNu({x,SNu({y,z})})
= K(x,K(y,z))

Ad (iii): Anta x,yêU. Da har man:

K(x,y) = SNu({x,y}) (Definisjon av K)
= SN({y,x}) (Elementær mengdelære)
= K(x,y) (Definisjon av K)

Ad (iv): Anta x,yêU. Da har man:

D(x,y) = UNu({x,y}) (Definisjon av D)
= UN({y,x}) (Elementær mengdelære)
= D(x,y) (Definisjon av D)

Ad (v): Anta x,y,zêU Da har man:

K(x,D(y,z)) = K(x,UNu({y,z})) (Definisjon av D)
= UNu(Mg(K(x,r): rê{y,z})) (A7)
= UNu({K(x,y), K(x,z)}) (Definisjon av "{x,y}")
= D(K(x,y),K(x,z))

Ad (vi): Anta x,y,zêU Da har man:

D(x,K(y,z)) = D(x,SNu({y,z})) (Definisjon av K)
= SNu(Mg(D(x,r): rê{y,z})) (A8)
= SNu({D(x,y), D(x,z)}) (Definisjon av "{x,y}")
= K(D(x,y),D(x,z)) (Definisjon av K)

Ad (vii): Anta x,yêU. Da har man:

Neg(K(x,y)) = Neg(SNu({x,y})) (Definisjon av K)
= UNu(Mg(Neg(r): rê{x,y})) (A10)
= UNu({Neg(x),Neg(y)}) (Definisjon av "{x,y}")
= D(Neg(x),Neg(y)) (Definisjon av D)

Ad (viii): Anta x,yêU. Da har man:

Neg(D(x,y)) = Neg(UNu({x,y})) (Definisjon av D)
= SNu(Mg(Neg(r): rê{x,y})) (A9)
= SNu({Neg(x),Neg(y)}) (Definisjon av "{x,y}")
= K(Neg(x),Neg(y)) (Definisjon av K)

Ad (ix): Anta xêU. I følge A15 har man da: K(x,t) = x. Siden têU følger ved hjelp av punkt (iii) ovenfor at K(x,t) = K(t,x). Man har følgelig at K(t,x)=x.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Gitt xêU har man også:

D(k,x) = Neg(Neg(D(k,x)) (A11)
= Neg(K(Neg(k),Neg(x))) (Jmf. (viii)
= Neg(K(t,Neg(x)) (Jmf. definisjon av t)
= Neg(Neg(x)) (i lys av det vi nettopp har vist)
= x (A11)

Ad (x): Dette punktet følger umiddelbart fra Teorem 6.
Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Teorem 21 x,yêU & C(x,y)=t & x=t. –> y=t

Bevis: Anta x,yêU & C(x,y)=t & x=t. I lys av definisjonen av C har man

t = C(x,y) = Neg(K(x,Neg(y))
= Neg(K(t,Neg(y)) (siden x=t)
= Neg(Neg(y)) (Jmf. Teorem 20, (ix))

Det følger at t=y. Man har altså at y=t. **Q.E.D.**

Teorem 22 x,yêU & C(x,y) = t = C(y,x). –> x=y

Bevis: Anta x,yêU & C(x,y) = t = C(y,x). Ved hjelp av definisjonen av C har man da:

(1) Neg(K(x,Neg(y))) = C(x,y) = C(y,x) = Neg(K(y,Neg(x)))

Fra dette følger ved hjelp av A11:

(2) K(x,Neg(y)) = Neg(Neg(K(x,Neg(y))))
= Neg(Neg(K(y,Neg(x)))) = K(y,Neg(x)) = K(Neg(x),y)

Siden x,yêU følger fa dette og A19 at x=y. **Q.E.D.**

Teorem 23 xêPt(U) –> ((Ay)(yêx–> y=t) <–> SNu(x) = t)

Bevis: Vi tar først for oss den ene halvdelen av denne satsen og viser:

xêPt(U) –> ((Ay)(yêx–> y=t) –> SNu(x) = t)

Anta xêPt(U). Tilfelle (i): x=ø. Da har man åpenbart at (Ay)(yêx –> y=t). Videre har man i lys av A5 at SNu(x) = t. Det følger at ((Ay)(yêx–> y=t) <–> SNu(x) = t). Satsen holder derfor i dette tilfellet.
Tilfelle (ii): x≠ø. Anta (Ay)(yêx –> y=t). Da følger x ={t}. Dette impliserer i lys av A12 at SNu(x) = SNu({t}) = t.

Vi skal dernest vise at: xêPt(U) & SNu(x) = t –> (Ay)(yêx –> y=t). Anta (1) xêPt(U) & SNu(x) = t. Igjen skiller vi mellom to tilfelle. Tilfelle (i): x=ø. Da har man umiddelbart at (Ay)(yêx –> y=t) siden antesedenten er tomt sann. Tilfelle (ii): x≠ø. Anta yêx for vilkårlig y. Ved hjelp av Teorem 6 og Teorem 7 har man (2) (Aw)(Max;k(w) –> têw). Fra dette og (1) følger:

(3) (Aw)(Max;k(w) –> SNu(x)êw)

Fra dette og Teorem 7, (ii) har man: (Aw)(Max;k(w) –> x Inkl w). Anta Max;k(w) for vilkårlig w. Da følger x Inkl w. Siden y er et vilkårlig element i x følger videre at følger yêw. Dette innebærer at (Aw)(Max;k(w) –> yêw). Man har altså:

(4) (Aw)(Max;k(w) –> têw) & (Aw)(Max;k(w) –> yêw)

Dette impliserer:

(5) (Aw)(Max;k(w) –> (têw <–> yêw))

Siden têU & yêxêPt(U) følger fra dette og Teorem (10) at y=t. Men y var et et vilkårlig element i x. Man har derfor (Ay)(yêx –> y=t). **Q.E.D.**

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Teorem 24 x,yêU. –> D(x, K(y,Neg(y)) = x

Bevis: Anta x,yêU for vilkårlige x,y. Ved hjelp av Teorem 6 følger da t = D(y,Neg(y)). Fra dette og A15 følger herav, siden xêU at K(x,D(y,Neg(y)) =x. Man har altså (1) (Ax)(Ay)(x,yêU –> K(x,D(y,Neg(y)) =x). Er xêU har man Neg(x)êU (Jmf. A2). Det følger om yêU for vilkårlig y at:

(2) K(Neg(x),D(y,Neg(y)) = Neg(x)

Fra dette, Teorem 20,(viii) og A11 følger:

(3) D(x,K(y,Neg(y))) = Neg(K(Neg(x),Neg(K(y,Neg(y)))))
= Neg(K(Neg(x), D(Neg(y),y)))
= Neg(K(Neg(x),D(y,Neg(y)))) (Jmf. Teorem 20)
= Neg(Neg(x)) (I lys av (2) ovenfor)
= x (Jmf. A11)

Dette viser at satsen holder. **Q.E.D.**

Teorem 25 xêU & yêPt(U) & rêU & x,Neg(x)êy. –> SNu(y) = K(r,Neg(r))

Bevis: Anta (1) xêU & yêPt(U) & rêU & x,Neg(x)êy. Sett per definisjon:

(2.1) q = y – {x,Neg(x)}
(2.2) p = Mg(Neg(r): rêq) og
(2.3) y1 = pU{x,Neg(x)}.

Vi skal først vise at:

(3) y = Mg(Neg(s): sêy1)

Vi ser først på inklusjonen mot høyre i (3): Anta zêy for vilkårlig z. Tilfelle (i): Anta ¬(zê{x,Neg(x)}. Da følger at zêq i lys av (2.1). Fra dette og (2.2) følger Neg(z)êp og derfor ved hjelp av (2.3) at Neg(z)êy1. Dette impliserer:
zêMg(Neg(s): sêy1). Tilfelle (ii) zê{x,Neg(x)}. Er da z=x har man
Neg(z)= Neg(x)ê{x,Neg(x)} Inkl y1 og derfor zêMg(Neg(s):sêy1)
Er z= Neg(x) har man Neg(z)=Neg(Neg(x))=xê{x,Neg(x)} Inkl y1 og derfor i sin tur at zêMg(Neg(s): sêy1). Dette viser at inklusjonen mot høyre holder.

Anta på den annen side at zêMg(Neg(s): sêy1) for vilkårlig z. Da har man z=Neg(r) & rêy1 for noe r. Tilfelle (i): rêp. Da har man i lys av (2.2) at r= Neg(t) der têq Inkl y. Det følger at z = Neg(r)= Neg(Neg(t)) = têy som er det vi ønsker. Tilfelle (ii): rê{x,Neg(x)}. Er da r=x følger at z=Neg(x)êy i lys av (1). Er r=Neg(x) har man z= Neg(r) = Neg(Neg(x)) = xêy i lys av (1). Dette viser at kondisjonalen mot venstre i (3) holder.

Fra (3) følger (4) y1 = Mg(Neg(r): rêy). For anta zêy1 for vilkårlig z. Da har man i lys av (3) at Neg(z)êMg(Neg(s): sêy1)=y. Derfor Neg(z)êy og følgelig at zêMg(Neg(r): rêy). Har man på den annen siden at zêMg(Neg(r): rêy) har man z=Neg(r) & rêy for noe r. Fra dette og (3) følger at r=Neg(s) &sêy1 for noe s. Da har man z = Neg(r) = Neg(Neg(s)) = sêy1. Dette viser at (4) holder.

Nå har man y1 Inkl U og at y1 er en mengde. Videre har man i lys av definisjonen av y1 at x,Neg(x)êy1. Fra dette og A14 følger:

(5) UNu(y1)=t

Man har da ved hjelp av A11 og A10 at

(6) SNu(y) = Neg(Neg(SNu(y))
= Neg(UNu(Mg(Neg(r): rêy)))
= Neg(UNu(y1)) = Neg(t) = k (Jmf. (4) og (5) rett ovenfor)

Fra (6) og Teorem 6 følger at SNu(y) = K(r,Neg(r)). **Q.E.D.**

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Teorem 26 (i) $x,y \hat{e} Pt(U) \rightarrow SNu(\{SNu(x)\}Uy) = SNu(xU\{SNu(y)\})$
(ii) $x,y \hat{e} Pt(U) \rightarrow UNu(\{UNu(x)\}\ U\ y) = UNu(xU\{UNu(y)\})$

Bevis: Ad (i): Anta $x,y \hat{e} Pt(U)$. Da har man:

$SNu(\{SNu(x)\}Uy) = SNu(xUy)$ (Jmf. Teorem 4, (ii))
$= SNu(yUx)$
$= SNu(\{SNu(y)\}Ux)$ (Teorem 4,(ii))
$= SNu(xU\{SNu(y)\})$

Ad (ii): Anta $x,y \hat{e} Pt(U)$. Sett per definisjon:

(1.1) $x0 = Mg(Neg(r):r\hat{e}x)$ og
(1.2) $y0 = Mg(Neg(r): r\hat{e}y)$

Da har man x0,y0 Inkl U & M(x0) & M(y0). I lys av det som er blitt bevist under punkt (i) har vi da:

(2) $SNu(\{SNu(x0)\}Uy0) = SNu(x0U\{SNu(y0)\})$

Nå har man:

$UNu(\{UNu(x)\}Uy) = Neg(SNu(Mg(Neg(r): r\hat{e}\{UNu(x)\}Uy)))$
$= Neg(SNu(\{SNu(Mg(Neg(w): w\hat{e}x)\}Uy0)$ (A9)
$= Neg(SNu(\{SNu(x0)\}Uy0))$
$= Neg(SNu(x0U\{SNu(y0)\}))$ (Jmf. (2))
$= Neg(SNu(Mg(Neg(r):r\hat{e}x)\ U\ \{SNu(Mg(Neg(r): r\hat{e}y))\}))$
$= Neg(SNu(Mg(Neg(r):r\hat{e}x)\ U\ \{Neg(UNu(y)\})$ (A9)
$= Neg(SNu(Mg(Neg(r): r\hat{e}(xU\{UNu(y)\}))))$
$= UNu(xU\{UNu(y)\})$ (A10)

Dette viser at satsen holder. **Q.E.D.**

Teorem 27 $x,y \hat{e} Pt(U)$ & x Inkl y & $x \neq \emptyset \rightarrow$
(i) $K(SNu(x), SNu(y)) = SNu(y)$
(ii) $K(UNu(x), UNu(y)) = UNu(x)$

Bevis: Ad (i): Anta $x,y \hat{e} Pt(U)$ & x Inkl y & $x \neq \emptyset$. Da har man:

$K(SNu(x),SNu(y)) = SNu(xUy)$ (Teorem 2)
$= SNu(y)$

Det siste holder siden x Inkl y og man derfor har at y=xUy.

Ad (ii): Anta $x,y \hat{e} Pt(U)$ & x Inkl y & $x \neq \emptyset$. I lys av Teorem 22 vil det være tilstrekkelig å bevise:

(a) $C(UNu(x), K(UNu(x), UNu(y))) = t$
(b) $C(K(UNu(x),Unu(y)), UNu(x)) = t$

For å vise (b) er det åpenbart tilstrekkelig å bevise:

(c) $(Ax)(Ay)(x,y \hat{e} U \rightarrow C(K(x,y),x) = t)$

Dette er tilstrekkelig fordi man har $SNu(x),SNu(y) \hat{e} U$ om $x,y \hat{e} Pt(U)$. (Jmf. A1 – A6). Vi beviser derfor (c) først:

Anta $x,y \hat{e} U$ for vilkårlige x,y. Da har man:

(1) $C(K(x,y),x) = Neg(K(K(x,y),Neg(x)))$
$= Neg(SNu(\{K(x,y), Neg(x)\}))$
$= Neg(SNu(\{SNu(\{x,y\}),Neg(x)\}))$
$= Neg(SNu(\{SNu(\{x,y\}\}U\{Neg(x)\}))$
$= Neg(SNu(\{x,y,Neg(x)\}))$ (Jmf. Teorem 4)

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Nå har man {x,y,Neg(x)} Inkl U og at x,Neg(x)ê{x,y,Neg(x)}. Ved hjelp av Teorem 6 og Teorem 25 har man da

(2) SNu({x,y,Neg(x)}) = k.

Fra (1) og (2) følger da C(K(x,y),x) = Neg(k) = t. Dette viser at (c) holder. Dermed har vi også gitt et bevis for (b).

Når det gjelder (a) vil det være tilstrekkelig å bevise de følgende tre påstander:

(d) x,y,zêU & C(x,y)=t & C(x,z)=t –> C(x,K(y,z)) =t
(e) xêU –> C(x,x)=t
(f) x Inkl y & x,yêPt(U) & x≠ø –> C(UNu(x), UNu(y)) = t

For anta x Inkl y & x,yêPt(U) & x≠ø . Da har vi SNu(x)êU og SNu(y)êU.
Det følger fra (e) at C(SNu(x),SNu(x)) = t. Fra dette (f) og (d) følger så det man ønsker om man i (d) setter inn "Snu(x)" for "x" og "y" og "SNu(y)" for "z".

Ad (d): Anta x,y,zêU & C(x,y)= t & C(x,z) =t. I lys av definisjonen av C har man da:

(3) Neg(K(x,Neg(y))) = t
(4) Neg(K(x,Neg(z))) = t

Fra dette følger

(5) K(x,Neg(y) = k & K(x,Neg(z)) = k i lys av definisjonen av k og loven om dobbeltnegasjon. Nå har man:

k = UNu({k}) = UNu({k,k}) = D(k,k)
= D(K(x,Neg(y)),K(x,Neg(z)))
= K(x,D(Neg(y),Neg(z))) (A7)
= K(x, Neg(K(y,z)) (A10)

Men da: C(x,K(y,z)) = Neg(K(x,Neg(K(y,z)))) = Neg(k) = t. Dette viser at (d) holder.

Ad (e): Anta xêU. Da har man:

C(x,x) = Neg(K(x,Neg(x)) = Neg(SNu({x,Neg(x)))

I lys av Teorem 6 og Teorem 25 har man SNu({x,Neg(x)} = k og derfor
C(x,x) = Neg(k) = t. Dette viser at (e) holder.

Ad (f): I lys av definisjonen av C er det tilstrekkelig å bevise:

(6) K(UNu(x), SNu(Mg(Neg(r): rêy))) = k.

I lys av Teorem 20 og A7 har man:

(7) K(UNu(x), SNu(Mg(Neg(r): rêy))) =
K(SNu(Mg(Neg(r): rêy)), UNu(x)) =
UNu(Mg(K(SNu(Mg(Neg(r):rêy)),z): zêx))

La p være et vilkårlig element der

(8) pêMg(K(SNu(Mg(Neg(r):rêy)),z): zêx). Da følger det at det finnes noe z der:
(9) zêx og
(10) p = K(SNu(Mg(Neg(r):rêy)),z)

Nå har man:

(11) K(SNu(Mg(Neg(r):rêy)),z) = SNu({SNu(Mg(Neg(r):rêy)),z})
= SNu({SNu(Mg(Neg(r):rêy))}U{z})
(Teorem 4) = SNu(Mg(Neg(r):rêy)U{z})

Nå har man at zêx Inkl y. Derfor er z,Neg(z)ê Mg(Neg(r):rêy)U{z}. Ved hjelp av Teorem 25 følger da p = K(SNu(Mg(Neg(r):rêy)),z) = k. Men p var et vilkårlig element slik at (8) holdt. Det følger derfor at:

(12) (Ap)(pêMg(K(SNu(Mg(Neg(r):rêy)),z): zêx) –> p=k)

Siden x≠ø følger herav:

(13) Mg(K(SNu(Mg(Neg(r):rêy)),z): zêx) = {k}

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

I lys av (7) har man da

K(UNu(x), SNu(Mg(Neg(r): rêy))) = UNu({k}) = k (A12)

Dette viser at (f) holder og avslutter dermed beviset for satsen. **Q.E.D.**

§5 Bevis for at teorien T;1 er deduktivt inkludert i Alt;(T;1).

For å vise at T;1 er deduktivt sett inkludert i Alt;(T;1) er det nødvendig å vise at alle de primitive begrepene i T;1 lar seg definere ved hjelp av de primitive predikatene i Alt;(T;1). Dernest må man vise at gitt disse definisjonene kan man utlede alle aksiomene og slutningsreglene i T;1 på basis av aksiomene og slutningsreglene i Alt;(T;1). De primitive predikatene i språket til T;1 består, i tillegg til medlemskaps-predikatet "x er et element i mengden y" og predikatet "x er en mengde", av de følgende konstruksjoner:

(1) "x er en logisk mulig verden ". Denne konstruksjonen forkortes med "MV(x)".
(2) "x er et presist deskriptivt utsagn". Denne konstruksjonen forkortes med "Ut(x)".
(3) "w er en mulig verden hvor utsagnet x er sant". Når det gjelder denne konstruksjonen benyttes uttrykket "True(w,x)" som forkortelse.

Betegner vi mengden som utelukkende inneholder disse predikatene med Δ1 er altså språket til T;1 identisk med L;ê[Δ1]. Teorien T;1 kan så defineres som den første-ordens teorien man får når ZFCu(L;ê[Δ1]) utvides med de følgende ikke-logiske aksiomer.

U1 (Ex)(M(x) & (Ay)(yêx <–> MV(y)) & Cd(x)≥ Aleph;0)
U2 (Ax)(Ay)(Ut(x) & Ut(y) –>
(x=y <–> (Aw)(MV(w) –>(True(w,x) <–> True(w,y)))))
U3 (Aw)(Ax)(True(w,x) –> (Ut(x) & MV(w)))
U4 (Ax)(M(x) & (Ay)(yêx –> MV(y)). –>.
(Ez)(Ut(z) & (Aw)(True(w,z) <–> wêx)))

La oss så se på hvordan U1 –U4 kan utledes i Alt;(T;1).

Når det gjelder U1 har man i lys av Teorem 12 i forrige paragraf at: (Ey)(M(y) & (Az)(zêy <–> Max;k(z))). Siden "MV(x)" per definisjon betyr "Max;k(x)" følger fra dette at: (Ex)(M(x) & (Ay)(yêx <–> MV(y)). Videre ser man at Teorem 13 sier at Cd(Mg(x: Max;k(x))) ≥ Aleph;0. Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av "MV(x)" at Cd(Mg(x: MV(x))≥ Aleph;0. Dette viser at U1 kan utledes i Alt;(T;1) på basis av de definisjonene vi har gitt.

Teorem 15 sier at det følgende holder:

(1) Ut(x) & Ut(y) & Mg(w: xêw & Max;k(w) & xêU) =
Mg(w: yêw & Max;k(w) & yêU). –> x=y

Gitt at (Ax)(MV(x) <–> Max;k(x)) ser man temmelig raskt at U2 kan utledes fra dette:

Anta (2) Ut(x) & Ut(y) og dessuten at:
(3) (Aw)(MV(w) –>(True(w,x) <–> True(w,y))).

Fra dette og definisjonen av "MV(x)" følger:

(4) (Aw)(Max;k(w) –> (True(w,x) <–> True(w,y)))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Nå har man per definisjon at "True(w,x)" betyr "xêw & Max;k(w)&xêU". Fra dette og (4) følger derfor:

(Aw)(xêw & Max;k(w) & xêU <–> yêw & Max;k(w) & yêU).

Fra dette, (2) og (1) følger så at x=y. Har man på den annen side at Ut(x)&Ut(y) og i tillegg at x=y utleder man lett ved hjelp av identitetsaksiomene at

(Aw)(MV(w) –>(True(w,x) <–> True(w,y)))

holder. Dette viser tydelig at U2 kan utledes i Alt;(T;1).

Fra Teorem 14 i forrige paragraf har man: True(w,x) –> Ut(x) & MV(w). Dette viser at U3 er utledbar i Alt;(T;1).

Når det gjelder U4 ser man at Teorem 16 sier at

(Ay)(M(y) & y Inkl Mg(x:MV(x)) –>(Ez)(U(z) & Mg(w: True(w,z)) = y))

Dette impliserer umiddelbart den versjonen av U4 som er nevnt ovenfor.

Vi har hermed bevist at alle grunnbegrepene i T;1 kan defineres ved hjelp av begreper i Alt;(T;1) på en slik måte at alle teoremene i den førstnevnte teori kan utledes i den sistnevnte. Dermed har vi nådd det hovedmål vi satte oss.

§6 Bevis for at teoremene i Alt;(T;1) kan utledes i T;1.

Man kan også vise at Alt;(T;1) kan reduseres til T;1 i den betydning som vi ovenfor viste at T;1 kunne reduseres til Alt;(T;1). Det vil i så fall være tilstrekkelig å vise at man kan definere de primitive predikatene som inngår i språket til Alt;(T;1) og som ikke er med i språket til T;1 utelukkende ved hjelp av dem som inngår i språket til T;1. De primitive predikatene i språket til Alt;(T;1) som ikke er med i språket til T;1 er "Kn(x,y)", "Dis(x,y)" og "Ng(x,y)". Den følgende definisjon viser hvordan disse konstruksjonene kan defineres utelukkende ved hjelp av primitive predikatkonstruksjoner i språket til T;1:

Definisjon 6.1

(i) Kn(x,y) <–> (xêU & yêPt(U) & μ(x) = IΩSN/rêy/(μ(r)))
(ii) Dis(x,y) <–> (xêU & yêPt(U) & μ(x) = UN/rêy/μ(r))
(iii) Ng(x,y) <–> x,yêU & μ(x) = I–μ(y)

Gitt denne definisjonen av de grunnbegrepene som inngår i Alt;(T;1), men som altså ikke inngår som primitive begreper i T;1, kan man vise at aksiomene A1 – A19 kan utledes i T;1. Vi skal vise dette.

Når det gjelder A1 – A6 er disse temmelig opplagte konsekvenser av Definisjon 6.1. Operasjonene SNu, UNu, Neg, K,D og C defineres på den måten vi gjorde i forbindelse med teorien T;1. I alle tilfelle er det lett å se at det følgende teorem holder i T;1 om Kn, Dis og Neg defineres som ovenfor:

Teorem 6.2 (T;1)

(i) yêPt(U) –> SNu(y) = (ix)Kn(x,y)
(ii) yêPt(U) –> UNu(y) = (ix)Dis(x,y)
(iii) yêU –> Neg(y) = (ix)Ng(x,y)
(iv) x,yêU –> K(x,y) = SNu({x,y})
(v) x,yêU –> D(x,y) = UNu({x,y})
(iii) k = SNu(U)
(iv) t = Neg(k)
(v) x,yêU –> C(x,y) = Neg(K(x,Neg(y))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Beviset for denne satsen er meget enkelt og overlates til leseren.

Den følgende sats viser at aksiomene A7 – A11 kan utledes i T;1.

Teorem 6.3 (T;1)

(i) yêU & xêPt(U). –> K(y,UNu(x)) = UNu(Mg(K(y,z): zêx))
(ii) yêU & xêPt(U). –> D(y, SNu(x)) = SNu(Mg(D(y,z): zêx))
(iii) xêPt(U) –> Neg(UNu(x)) = SNu(Mg(Neg(y): yêx))
(iv) xêPt(U) –> Neg(SNu(x)) = UNu(Mg(Neg(y): yêx))
(v) xêU –> (Neg(Neg(x)) = x & x≠Neg(x))

Bevis: Ad(i) og (ii): Anta yêU & xêPt(U). Da har man:

rêμ(K(y,UNu(x))) <–> rêμ(y) & rêμ(UNu(x))
<–> rêμ(y) & (Ez)(rêμ(z) & zêx)
<–> (Ez)(rêμ(y)Ωμ(z) & zêx)
<–> (Ez)(rêK(y,z) & zêx)
<–> rêμ(UNu(Mg(K(y,z): zêx)))

Dette viser at (i) holder. Når det gjelder (ii) har man:

rêμ(D(y, SNu(x))) <–> rêμ(y) v rêμ(SNu(x))
<–> rêμ(y) v (rêI &(Az)(zêx –> rêμ(z)))
<–> rêI & (Az)(zêx –> (rêμ(y) v rêμ(z)))
<–> rêI & (Az)(zêx –> rêμ(D(y,z)))
<–> rêμ(SNu(Mg(D(y,z): zêx)))

Ad (iii) og (iv): Anta xêPt(U). Man har:

rêμ(Neg(UNu(x))) <–> rê(I– μ(UNu(x))
<–> rêI & ¬(rêμ(UNu(x)))
<–> rêI & ¬(rêUN(Mg(μ(s): sêx))
<–> rêI & ¬((Es)(rêμ(s) & sêx)
<–> rêI & (As)(sêx –> ¬(rêμ(s))
<–> rêI & (As)(sêx –> rê(I–μ(s))
<–> rêI & (As)(sêx –> rêμ(Neg(s)))
<–> rêI& rê SN(Mg(μ(Neg(s)):sêx))
<–> rê(IΩ SN(Mg(μ(Neg(s)):sêx)))
<–> rêμ(SNu(Mg(Neg(y): yêx)))

Dette viser at (iii) holder. (iv) bevises på tilsvarende måte.

Ad (v). Anta xêU. Da har man:

rêμ(Neg(Neg(x))) <–> rê(I–μ(Neg(x)))
<–> rê(I–(I– μ(x))
<–> rêI & ¬(rê(I–μ(x)))
<–> rêI &rêμ(x)
<–> rêμ(x)

Man må også vise at x≠Neg(x) om xêU. Det vil være tilstrekkelig å bevise at det finnes r der vi enten har

(1) rêμ(x) & ¬(rêμ(Neg(x))) eller der
(2) ¬(rêμ(x)) & rêμ(Neg(x))

Siden I er ikke-tom finnes det rêI. Tilfelle (a): rêμ(x). Da er det klart at ¬(rê(I–μ(x)) og derfor at ¬(rêμ(Neg(x))). Disjunksjonen av (1) og (2) holder derfor. Tilfelle (b): ¬(rêμ(x)).

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

da har vi rê(I–μ(x)) og derfor rêμ(Neg(x)). Også i dette tilfellet holder disjunksjonen av (1) og (2). Dette viser at (v) holder. **Q.E.D.**

Det følgende teorem viser at aksiomene A12 til A19 kan utledes i T;1.

Teorem 6.4 (T;1)

(i) xêU –> (SNu({x}) = x & UNu({x}) = x
(ii) Cd(U) ≥ Aleph;0 & (Ey)(M(y) & y = U)
(iii) xêU & y Inkl U & M(y) & x,Neg(x)êy . –> UNu(y) = t
(iv) xêU –> K(x,t) = x
(v) M(x) & x Inkl U –>
t = UNu(Mg(SNu(zUMg(Neg(r): rê(x–z))): zêPt(x))
(vi) M(x) & x ê Pt(Pt(U)) –> UNu(Mg(UNu(z): zêx)) = UNu(UN(x))
(vii) M(x) & x ê Pt(Pt(U)) –> SNu(Mg(SNu(z): zêx)) = SNu(UN(x))
(viii) x,yêU & K(x,Neg(y)) = K(Neg(x),y) –> x=y

Bevis: Ad (i): Anta xêU. Da har man:

rêμ(SNu({x})) <–> rêIΩSN(Mg(μ(q): qê{x}))
<–> rêIΩSN({μ(x)}
<–> rêμ(x).

At UNu({x}) = x bevises på en helt tilsvarende måte. Dette overlates til leseren.

Ad (ii): Fra Teorem 1 i §4 i Rognes [2] fremgår det at man i T;1 kan vise at det finnes en entydig avbildning f av U på Pt(I). Fra dette følger eksistensen av mengden U ved hjelp av replacement-aksiomet. Siden det følger fra aksiomet U1 i T;1 at Cd(I)≥Aleph;0 følger det at Cd(U) ≥ 2^Aleph;0 og derfor Cd(U) ≥Aleph;0.

Ad (iii): Anta xêU & y Inkl U & M(y) & x,Neg(x)êy. Da har man:
rêμ(UNu(y)) <–> rêUN(Mg(μ(q): qêy)). Siden xêy følger at μ(x)êMg(μ(q):qêy). Siden videre Neg(x)êy følger at (I–μ(x))êMg(μ(q):qêy). Det følger at:

(3) μ(x)U(I–μ(x)) = I Inkl UN(Mg(μ(q):qêy).

Nå har man imidlertid også at UN(Mg(μ(q):qêy) Inkl I. Det følger fra dette at rêμ(UNu(y)) <–> rêI <–> rêμ;-1(I) = t. Dette viser at (iii) holder.

Ad (iv): Anta xêU. Da har man

rêμ(K(x,t)) <–> rêμ(x)Ωμ(t) <–> rêμ(x)ΩI <–> rêμ(x).

Dette viser at påstanden holder.

Ad (v): Anta xêPt(U). Man må åpenbart ha at sannhetsmengden til UNu(Mg(SNu(zUMg(Neg(r): rê(x–z))): zêPt(x))) er inkludert i mengden av alle de logisk mulige verdenene, ie. I. Anta rêμ(t)=I. Sett per definisjon:

(1) P(r) =Mg(z: zêx & rêμ(z))
(2) Q(r) = Mg(Neg(s): sê(x–P(r)))

Sett a = SNu(P(r)UQ(r)). Man har da åpenbart at

(3) aêMg(SNu(zUMg(Neg(r): rê(x–z))): zêPt(x))

Videre har man generelt at dersom yêx så gjelder μ(y) Inkl μ(UNu(x)). For anta for vilkårlig objekt t at têμ(y). Man har at μ(UNu(x)) = UN(Mg(μ(t):têx)). Siden yêx følger da têUN(Mg(μ(t): têx) og derfor têμ(UNu(x)). Man har altså:

(4) (Ax)(xêPt(U) –> (Ay)(yêx –> μ(y) Inkl μ(UNu(x)))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Vi ønsker nå å vise:

(5) rêμ(SNu(P(r)UQ(r)))

Det vil være tilstrekkelig å bevise:

(6) (Az)(zêP(r)UQ(r) –> rêμ(z)) Er zêP(r) er det åpenbart fra definisjonen av P(r) at rêμ(z)). Anta zêQ(r) for vilkårlig z. Da har man at z=Neg(s) for noe sê(x–P(r)). Da følger sêx & ¬(sêx & rêμ(s)). Dette impliserer at ¬(rêμ(s)). Siden rêI har vi derfor rê(I–μ(s)) = μ(Neg(s)) = z. Dette viser at (6), og derfor (5), holder. Fra (3), (4) og (5) følger så det vi ønsker nemlig:

rêμ(UNu(Mg(SNu(zUMg(Neg(r): rê(x–z))): zêPt(x))))

Ad (vi): Anta xêPt(Pt(U)). Da har man:

rêμ(UNu(Mg(UNu(z): zêx)))
<–> rêUN(Mg(μ(s): sêMg(UNu(z): zêx))
<–> (Es)(rêμ(s) & sêMg(UNu(z): zêx))
<–> (Es)(rêμ(s) & (Et)(s = UNu(t) & têx))
<–> (Es)(Et)(rêμ(s) & s= UNu(t) & têx)
<–> (Et)(rêμ(UNu(t)) & têx)
<–> (Et)(Ep)(rêμ(p) & pêt & têx)
<–> (Ep)(rêμ(p) & (Et)(pêt &têx))
<–> (Ep)(rêμ(p) & pêUN(x))
<–> rêμ(UNu(UN(x)))

Ad (vii): Anta xêPt(Pt(U)). Da har man:

rêμ(SNu(Mg(SNu(z): zêx)))
<–> rêSN(Mg(μ(s): sêMg(SNu(z): zêx))
<–> (As)(sêMg(SNu(z): zêx) –> rêμ(s))
<–> (As)((Et)(s = SNu(t) & têx) –> rêμ(s))
<–> (As)((Et)(s= SNu(t) & têx) –> rêμ(s))
<–> (As)(At)(s= SNu(t) & têx. –> rêμ(s))
<–> (At)(têx –> rêμ(SNu(t)))
<–> (At)(têx –> (Ap)(pêt–>rêμ(p)))
<–> (As)(At)(têx . –> (sêt –> rêμ(s)))
<–> (As)((Et)(sêt &têx) –> rêμ(s))
<–> (As)(sêUN(x) –> rêμ(s))
<–> rêμ(SNu(UN(x)))

Ad (viii): Anta (1) x,yêU & K(x,Neg(y)) = K(Neg(x),y). Anta for reduktio ad absurdum at μ(x)≠μ(y). Da finnes r slik at rêμ(x)&¬(rêμ(y)).v. ¬(rêμ(x))&rêμ(y). Vi ser bare på det første tilfellet siden det andre blir helt analogt. I dette tilfellet har man åpenbart at (2) rêμ(x)Ω(I–μ(y)) og derfor at (3) rêμ(K(x,Neg(y)). Anta rêμ(K(Neg(x),y)). Da rêμ(Neg(x)) og da rê(I–μ(x)). Fra dette følger ¬(rêμ(x)) som åpenbart strider mot (2). Det følger at ¬(rêμ(K(Neg(x),y)) og derfor at
K(x,Neg(y)) ≠ K(Neg(x),y). Men dette strider mot (1).

Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Som det fremgår fra Teorem 6.2 – Teorem 6.4 har vi nå vist at aksiomene A1 – A19 i teorien Alt;(T;1) kan utledes i T;1. Dette innebærer at alle teoremer som kan utledes i Alt;(T;1) også kan utledes i T;1.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

§7 Oppsummering og konklusjon.

Vi har i §2 i kraft av definisjonene Definisjon 2.1 og Definisjon2.2 presentert en reduksjon av språket til teorien T;1, ie. L;ê[Δ1], til språket til teorien Alt;(T;1). Det siste språket betegnet vi tidligere med "L;ê[Δ]". (Se §2). Denne reduksjonen, la oss kalle den f, som i det vesentlige er gitt ved de to nevnte definisjoner, avbilder alle formlene i L;e[Δ1] på formler i L;e[Δ]. Funksjonen f har i tillegg, noe man lett innser, den egenskap at man mekanisk kan konstruere f(F) om F er en formel i L;ê[Δ1]. Det interessante ved denne reduksjonen er at begrepet mulig verden reduseres til begrepet maksimalt konsistent utsagnsmengde.

Fra en formell synsvinkel er funksjonen f ikke noe annet en det vi i Rognes [2] har kalt en intepretasjon av L;e[Δ;1] inn i L;e[Δ] som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene og som oppfyller de følgende krav:

(i) f(MV(x)) = Maks;k(x)
(ii) f(True(w,y)) = (yêU & Maks;k(w) & yêw)
(iii) f(U(x)) = U(x)

Vi har derfor i det vesentlige bevist den følgende sats:

Teorem 7.1 La f være den intepretasjonen av L;e[Δ;1] inn i L;e[Δ] som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene, og som dessuten oppfyller kravene (i) - (iii). Da gjelder:

(AF)(FêTh(T;1) –> f(A)êTh(Alt;(T;1)))

På den annen side har vi også i §6 vist at det følgende holder:

Teorem 7.2 La ∂ være den intepretasjonen av L;e[Δ] inn i L;e[Δ;1] som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene og som dessuten oppfyller de følgende krav:

(i) ∂(Kn(x,y)) = (xêU & yêPt(U) & μ(x) = IΩSN/rêy/(μ(r)))
(ii) ∂(Dis(x,y)) = (xêU & yêPt(U) & μ(x) = UN/rêy/μ(r))
(iii) ∂(Ng(x,y)) = (x,yêU & μ(x) = I–μ(y))
(iv) ∂(U(x)) = U(x)

Da gjeder: (AF)(FêTh(Alt;(T;1)) –> ∂(F)êTh(T;1))

Disse to satsene oppsummerer det vesentligste av det som har blitt oppnådd i dette arbeidet.

***

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

*

Referanser

*

Referanser

Prawitz [1], Prawitz, Dag, "Propositions", *Theoria,* vol.34, 1968, p 134 - 146
Rognes [1], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2], Rognes, Morten. *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære.* Maskinskrevet manus. 1985
Rognes [3], Rognes, Morten, *Et sammendrag av en teori om egenskaper og presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [4], Rognes, Morten, *Et bevis for et teorem om intepretasjoner i teorien om presise deskriptive utsagn* , Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [5], Rognes, Morten, *Egenskaper. Et sammendrag av to mulige teorier*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [6], Rognes, Morten, *ZFC og eksistensen av urindivider*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [7], Rognes, Morten, *Noen betraktninger over urindivider i Zermelo-Fraenkel mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [8], Rognes, Morten, *Egenskaper. Del I.*, Maskinskrevet manuskript, 1985

*

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

APPENDIX I

Et sammendrag av systemet ZFCu(L).

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Et sammendrag av systemet ZFCu(L).

I dette tillegget vil det bli gitt en kortfattet beskrivelse av det mengdeteoretiske systemet ZFCu(L) der L er et første-ordens språk som enten er identisk med L;e, eller en utvidelse av dette språk med nye ikke-logiske predikatkonstruksjoner.

Det bemerkes at L;e er det første-ordens språket som ved siden av de logiske konstruksjonene: –>, ¬, v, &, <–>, A, E og =, utelukkende inneholder de to ikke-logiske predikatkonstruksjonene "xêy", som leses "x er et element i mengden y", og"M(x)" som leses "x er en en mengde".

I det følgende må man derfor anta at L enten er L;e eller en utvidelse av dette språket med visse nye ikke-logiske predikater.

La DêFm(L). Da sies D å være et *setningslogisk* aksiom i L hvis og bare hvis det finnes formler A,B og C i L slik at D er identisk med en av de følgende formler:

(1) A–>(B–>A)
(2) (¬B–> ¬A) –> (A –>B)
(3) (A–>(B–>C)) –> ((A–>B) –> (A–>C))

D sies å være et *predikatlogisk* aksiom i L hvis og bare hvis det enten finnes formler A,B i L og variabeltegn x,y i L og B er nøyaktig som A unntatt eventuelt ved å ha y som fri variabel på et eller flere steder hvor A har x som fri variabel og D er :

(4) (Ax)A–> B

eller det er slik at det finnes formler A,B i L og et variabeltegn x der x ikke forekommer fritt i B og hvor D er identisk med den følgende formel:

(5) (Ax)(B–>A) –> (B –> (Ax)A)

Tilslutt sies D å være et *identiteslogisk* aksiom i L hvis og bare hvis det finnes et variabeltegn x i L og D er formelen:

(6) (Ax)(x=x)

eller det finnes variabeltegn x,y i L og formler A,B i L der B er som A bortsett eventuelt ved å ha en fri forekomst av y på et eller flere steder hvor B har en fri forekomst av x og D er den følgende formel:

(7) x=y –> (A <–> B)

Et *logisk* aksiom i L er da en formel i L som enten er et setningslogisk aksiom, et predikatlogisk eller et identitetslogisk aksiom i L.

De følgende formler i L kalles henholdsvis for mengdeaksiomet, urmengdeaksiomet, ekstensjonalitetsaksiomet, nullmengdeaksiomet, parmengdeaksiomet, foreningsmengdeaksiomet, potensmengdeaksiomet, uendelighetsaksiomet, fundierungsaksiomet og utvalgsaksiomet i L:

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

M1 (Ax)(Ay)(xêy –> M(y))
M2 (Ey)(M(y) & (Ax)(xêy <–> ¬M(x)))
M3 (Ax)(Ay)(M(x) & M(y) & (Ez)(zêx)& (Ez)(zêy) &
(Az)(zêx <–> zêy) –> x=y)
M4 (Ey)(M(y) & ¬(Ez)(zêy) & (Aw)(M(w) &¬(Ez)(zêw). –> w=y))
M5 (Ay)(Az)((Ex)(M(x) & (Aw)(wêx <–> (w=y v w=z))))
M6 (Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (Ew)(zêw & wêx))))
M7 (Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (M(z) & (Aw)(wêz –> wêy)))))
M8 (Ex)(M(x) & (Ay)(M(y) &¬(Ez)(zêy) –> yêx) &
(Az)(M(z)&zêx –> (Ew)(M(w) & wêx & (Ar)(rêw <–> r=z))))
M9 (Ax)(M(x) &(Ew)(wêx) –> (Ey)(yêx & ¬(Ez)(zêy &zêx)))
M10 M(x) & (Ay)(yêx –> (M(y)&(Ez)(zêy))) &
(Ay)(Az)(y,zêx & y≠z –> ¬(Ew)(wêy &wêz)) –>
(Ez)(M(z) & (Ay)(yêx –> (Er)(rêy &rêz &(At)(têy &têz –> t=r))))

I tillegg til disse formlene som nå har blitt nevnt sies A å være et replacement-aksiom i L hvis og bare hvis det finnes en formel B i L som har x og y som fri variabler og der variablene w og w' ikke forekommer fri og hvor A er identisk med formelen:

M11 (Ax)(Ay)(Az)(B(x,y) & B(x,z) –> y=z) & M(w) –>
(Ew')(M(w') & (Ax)(xêw' <–> (Ey)(yêw & B(y,x))))

Tilslutt sies A å være et utsondringsaksiom i L hvis og bare hvis det finnes en formel B som ikke inneholder x og y som fri variabler og A er identisk med den følgende formel:

M12 (Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (zêy & B)))

Det mengdeteoretiske system ZFCu(L) er nå den første-ordens teorien i L hvis logiske aksiomer er alle de logiske aksiomene i L slik disse har blitt definert ovenfor og der de ikke-logiske aksiomene i L er M1 – M10 samt alle utsondrings- og replacement-aksiomer i L. Slutningsreglene i teorien er utelukkende modus ponens og universell generalisering.

Dette system er detaljert beskrevet i Rognes [1]. Der er det også gitt detaljerte definisjoner av alle de rent mengdeteoretiske begrepene som vi vil benytte oss av i forbindelse med denne teorien.

Det kan være passende å fremsette to bemerkninger helt tilslutt. Fra aksiomlisten M1 – M12 ser man at aksiomene M3 – M10 og aksiomskjemaene M11 og M12 er de vanlige aksiomene i ZFC. Men siden våre variabler er generelle og vi har føyd til mengdepredikatet M(x) blir formuleringen av de enkelte aksiomer litt annerledes enn vanlig. Aksiomene M1 og M2 sier henholdsvis at noe er et element i noe annet bare om det siste er en mengde og at det finnes en mengde som inneholder nøyaktig de og bare de entiteter som er ikke-mengder, dvs. de såkalte urindivider. Det sistnevnte aksiom blir mer utførlig diskutert i Rognes [5] og [6] og leseren anbefales å konsultere disse to arbeidene om det ønskes mer informasjon om denne versjonen av Zermelo- Fraenkel systemet.

Det skulle være klart at om L' er en utvidelse av L som i sin tur er en utvidelse av L;e så er mengden av de logiske aksiomene i L' ikke identisk med mengden av de logiske aksiomene i L. Dette har sin bakgrunn i følgende forhold. Utvides L til L' vil L' inneholde konstruksjoner som ikke foreligger i L. De formlene som inneholder disse nye konstruksjonene kan da ikke være formler i L. La A;0 være en slik formel i L' og B;0 en annen slik formel. Da vil f.eks.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

A;0 –>(B;0–>A;0) være et logisk aksiom i L'. Men denne formelen er ikke en formel i L og kan da heller ikke være noe logisk aksiom i L. Det samme gjelder de andre logiske aksiomskjemaene.

En lignende bemerkning kan også fremsettes i forbindelse med replacementaksiomene og utsondringsaksiomene. Er L' en genuin utvidelse av L vil f. eks. klassen av utsondringsaksiomer i L' inneholde klassen av utsondringsaksiomene i L som en ekte delmengde. For anta A;0 er en formel i L' som ikke er med i L og anta at A;0 er lukket. Anta videre at B er en formel i L der variablene x,y ikke forekommer fri. Da er A;0&B en formel i L', men ikke noen formel i L og den følgende formel er derfor et utsondringsaksiom i L', men ikke i L:

(Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (zêy & A;0&B))))

Lignende bemerkninger kan gjøres i forbindelse med replacementaksiomet, dvs. aksiomskjemaet M12.

***

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Copyright beskrivelse

Dette arbeidet er © Morten Rognes 2002. Det er fullstendig fritt i den forstand at man kan kopiere det for eget bruk og distribuere kopier til andre så lenge dette ikke er for salg eller økonomisk vinning. *Kopier må være av arbeidet i sin helhet og i sin opprinnelige form slik det er distribuert her, og må i tillegg inneholde denne copyright-beskrivelsen skrevet på norsk* .

Det er lov til å sitere fra dette arbeidet i egne skrifter etter de regler og standarder som er internasjonalt akseptert for sitering i vitenskapelige publikasjoner. Under ingen omstendigheter er det lov å sitere deler av dette arbeid, eller hele dette arbeid, på en slik måte at man utgir det for å være ens eget.

Henvisninger til dette arbeid bør inneholde de følgende data i en komma-separert liste: etternavnet til denne forfatteren, fornavnet til denne forfatteren, tittelen på arbeidet, årstallet det opprinnelig ble skrevet som angitt på tittelbladet, uttrykket "Upublisert", den fullstendige URL fra hvilket dette arbeidet ble lastet ned, dato og årstall for nedlasting, samt det versjonsnummeret som er angitt på tittelbladet. Eksempel:

> Rognes, Morten, "En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære", 1985, Upublisert, http://www.uio.no/~mrognes/arbeider/mrog73a.sit.hqx, 4-4-2002, v1.00.